

1.正五边形的尺规作法

摘自《中学生数学》——《五角星与黄金分割》

作者：江苏省张家港市乐余高级中学 顾汉忠

注释：郭世杰

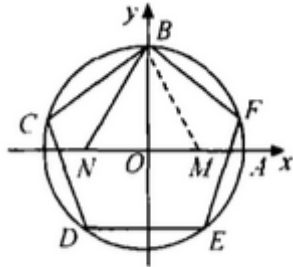


图 1

如图 1 所示, 设单位圆与 Ox 、 Oy 轴分别交于 $(1,0)$ 、 $B(0,1)$ 点, 正五边形的尺规作法步骤如下:

- (1) 取 OA 中点 M ;
- (2) 在 x 轴上截取 MN , 使得 $|MN|=|MB|$, 且 N 在 M 左侧;
- (3) 以 BN 之长作为弦长 (即正五边形边长), 在圆 O 上连续截取, 依次得到 C 、 D 、 E 、 F 四点, 顺次连结, 即得单位圆 O 的内接正五边形 $BCDEF$.

证明: 由作法, 点 M 、 B 的坐标分别为 $M(1/2,0)$ 、 $B(0,1)$, 则 $|MB|=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$$\because |MN|=|MB|$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 坐标为 } (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0),$$

$$\begin{aligned} \therefore |BN| &= \sqrt{1 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

由作法得

$$|BC|=|CD|=|DE|=|EF|=\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

另一方面, 设单位圆的内接正五边形为 $BC'D'E'F'$, 则 $\angle BOC'=72^\circ$, 由垂径分弦定理得 $|BC'|=2\sin 36^\circ$ (72 度的一半是一半的 BC 距离), 考虑三角函数知识,

$$\because \sin 36^\circ = \cos 54^\circ$$

$$\therefore 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ \quad (\text{左侧使用二倍角公式, 右侧使用三倍角公式}),$$

$$\text{设 } t = \sin 18^\circ, \because \cos 18^\circ > 0,$$

$$\therefore 2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3 = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3$$

$$\therefore \text{有 } 4t^2 + 2t - 1 = 0, \text{ 解得 } t = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

$$\text{进而 } \cos 18^\circ = \sqrt{1 - t^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}. \text{ 可得 } \cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

$$\text{于是 } \sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

这样, 单位圆的内接正五边形边长为 $\frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

由作法，C、D、E、F 四点与 C'、D'、E'、F' 分别重合，故有 $|FB|=|F'B|=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 。即上述作法为单位圆的内接正五边形的准确几何作法。

求 $\sin 36^\circ$ ，请用根号表示结果。

解 作黄金 $\triangle ABC$ ， $\angle BAC=36^\circ$ ， $\angle ABC=\angle ACB=72^\circ$ 。

令 $BC=a, AB=AC=b$ 。

过 B 作 $\angle ABC$ 的角平分线 BD，交 AC 于 D。

因为等腰 $\triangle ABC \sim$ 等腰 $\triangle BCD$ ，

所以 $BC/CD=AB/BC$ ，

故 $CD=a^2/b$ ，

由此得： $AD=b-a^2/b=(b^2-a^2)/b$ 。

因为 $BC=BD$ ，故 $a=(b^2-a^2)/b$ 。

即得： $b^2=a^2+ab$

令 $b/a=t$ ，则 $t^2-t-1=0$ ，

解方程得： $t=(\sqrt{5}+1)/2$ 。

故 $b/a=(\sqrt{5}+1)/2$ ， $a/b=(\sqrt{5}-1)/2$ 。

由正弦定得： $\sin 36^\circ / \sin 72^\circ = a/b = (\sqrt{5}-1)/2$ 。

故得： $\cos 36^\circ = (\sqrt{5}+1)/4$ 。

因而得： $\sin 36^\circ = [\sqrt{(10-2\sqrt{5})}]/4$ 。