# 程序员讲数学

21工作室出品

# 书到用时方恨少

- 数学就像素数一样，是所有科学的理论表达基础，像三体中代际交替，只要环境合适就能积累出高段位的文明。
- 很多数学理论就像幻海遗珠，独自发展起来，但是在不被应用的时候就很难联系和成就一番事业。
- 也有很多理论，结果被传承了，但是发现过程被遗忘。人是懒惰的。但是这个发现过程有助于他人成长。我们虽然不需要了解所有失败和痛苦，但是能够让我们对理论领悟深刻的，永远是那些挫折，这也就是为什么记忆宫殿残暴却庞大的原因。

# 缘起

- 产生一个随机数可以用来抽奖。年会时烘托气氛、玩游戏时打怪掉落装备和碰到缘分的武器以及好看的皮肤等等。
- 手机验证码
- 数字化、信息化之后。抽签决定命运的时刻，远程会议决定运气的时刻，如何得到一个公认没有暗箱操作的随机数，是后续执行能力的基础。如果与会人员不服这个使命分配。那么将无法达成信息化决策。

# 研究已有流行语言

- java：线性同余法生成随机数

$$\begin{cases} seed = (a * seed + c)\%m \\ return\ seed/float(m) \end{cases}$$

根据Hull-Dobell Theorem，需要满足：

1. c与m互质
2. m的所有质因数都能整除a-1
3. 如果m能被4整除，那么要求a-1也能被4整除

# 选取自己的参数做实验

- 实践是检验真理的唯一标准
- 很多知识不管来源是哪里，你获得之后需要考量的并不是权威与否，可信度可以节约你的时间，但是更重要的是复现结论。道理如果不能应用，那么讨论道理是否有用和道理真假就没什么意义了。
- 很多人仅仅处于第一阶段：哦，我找到了理论基础，立于不败之地。但是不知道自己如何用铠甲护住自己；嗯，我理解了，知道有这么回事，过程我不懂，但是结论我看懂了。这样的人也仅仅是会操作、会干活，但是绝不可能靠这样的人来创新。

# 印证设想是最兴奋的

- 兴趣是最好的老师。你想完成一件事情，你就需要去促成完成它的条件。去寻找完成它的步骤。去凝聚完成它的力量。当你完成一遍的时候，你就有信心完成很多遍。
- 人生能够完成很多遍的大道理的时候不多。有很多关键时刻掌握在别人手中。比如医生、命运。这些如果你在选择之前能够有足够的积累，就可以不听别人的，就可以走自己的路。

# 实验一：

- 选取：

```
m = 985951 * 985951 * 985969
a = 985951 * 985969 + 1
c = 100
```

- 结果：

```
1.4199489644361577e-05 0.00012982389694259736 0.0003468732229234046
 0.0029534936330660125 0.0037790924711422484 0.004706116227901056 0.
 .010862608791933666 0.0123981820607879 0.01403518024832471 0.01577
```

- 分析：m数值过大，导致计算机整型无法正常运算。

```
>>> 13609640687331/(985951 * 985951 * 985969)
1.4199489644361577e-05
>>>
```

# 实验二：

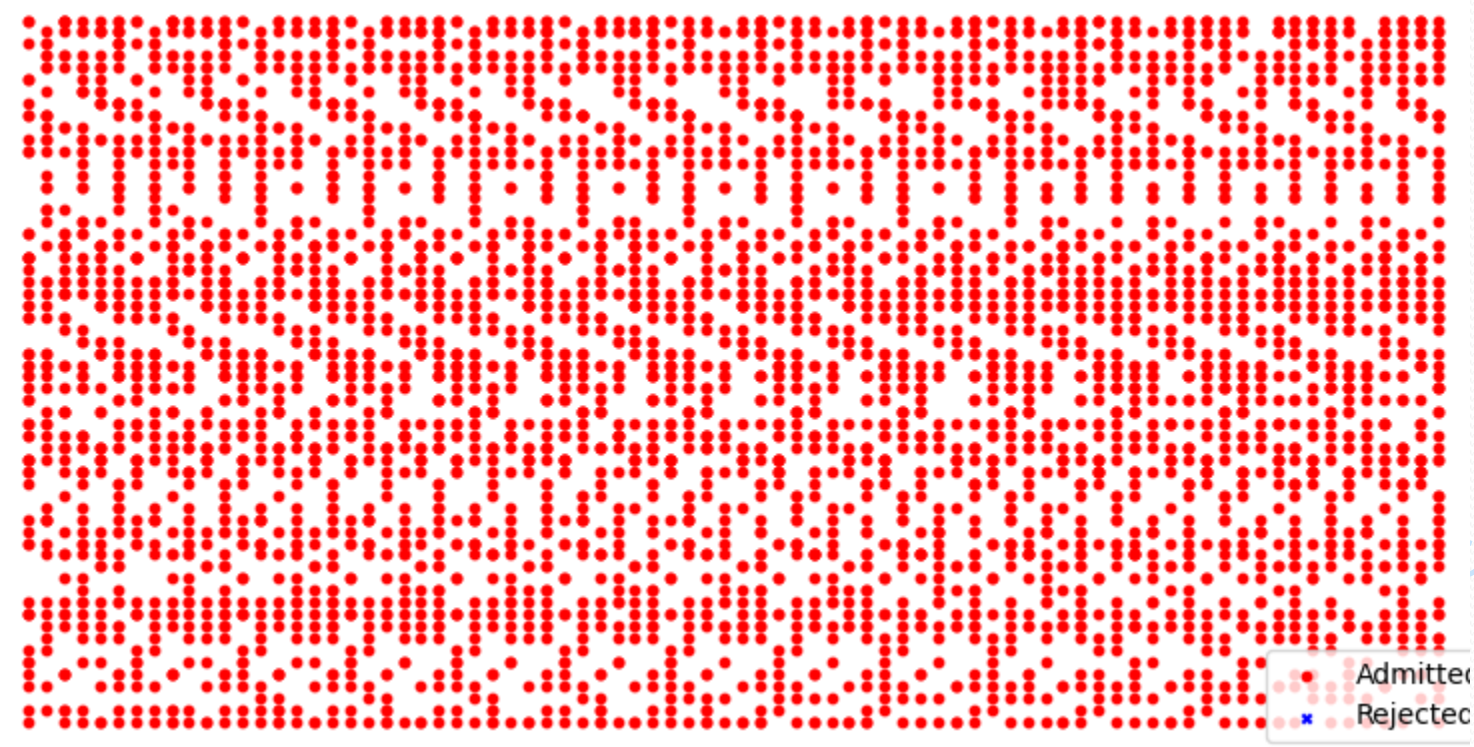
- 选取：

```
m = 199 * 199 * 49681
a = 199 * 49681 + 1
c = 12345
```

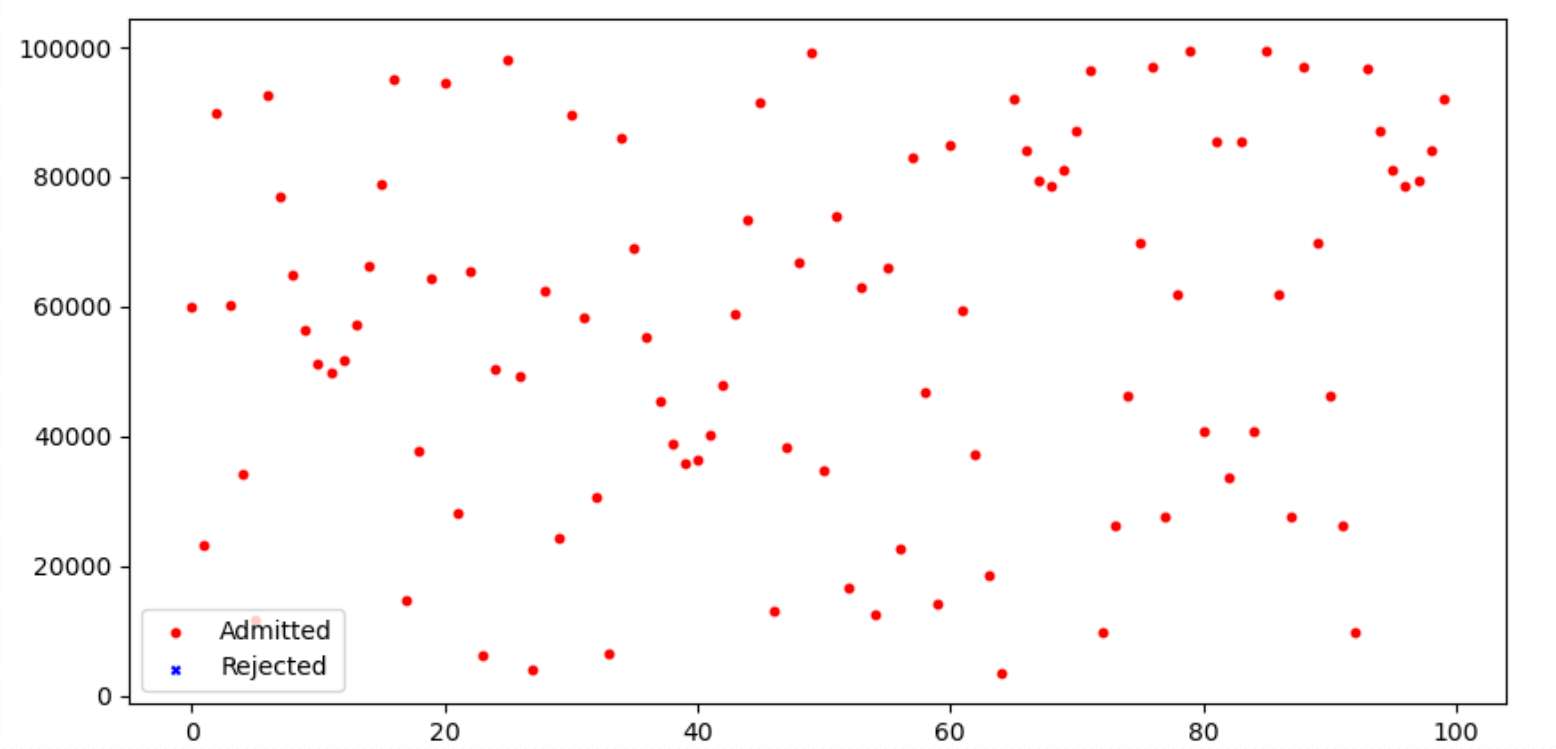
- 将m控制在0到2**31-1范围内，c取5位数，打印4800个点分布到800*600的画布上

# 实验二：

- 可以看出虽然并不完全，但是循环明显



- 取100个数，查看分布
- 可以看出有类似低谷的V字出现



# 实验三：

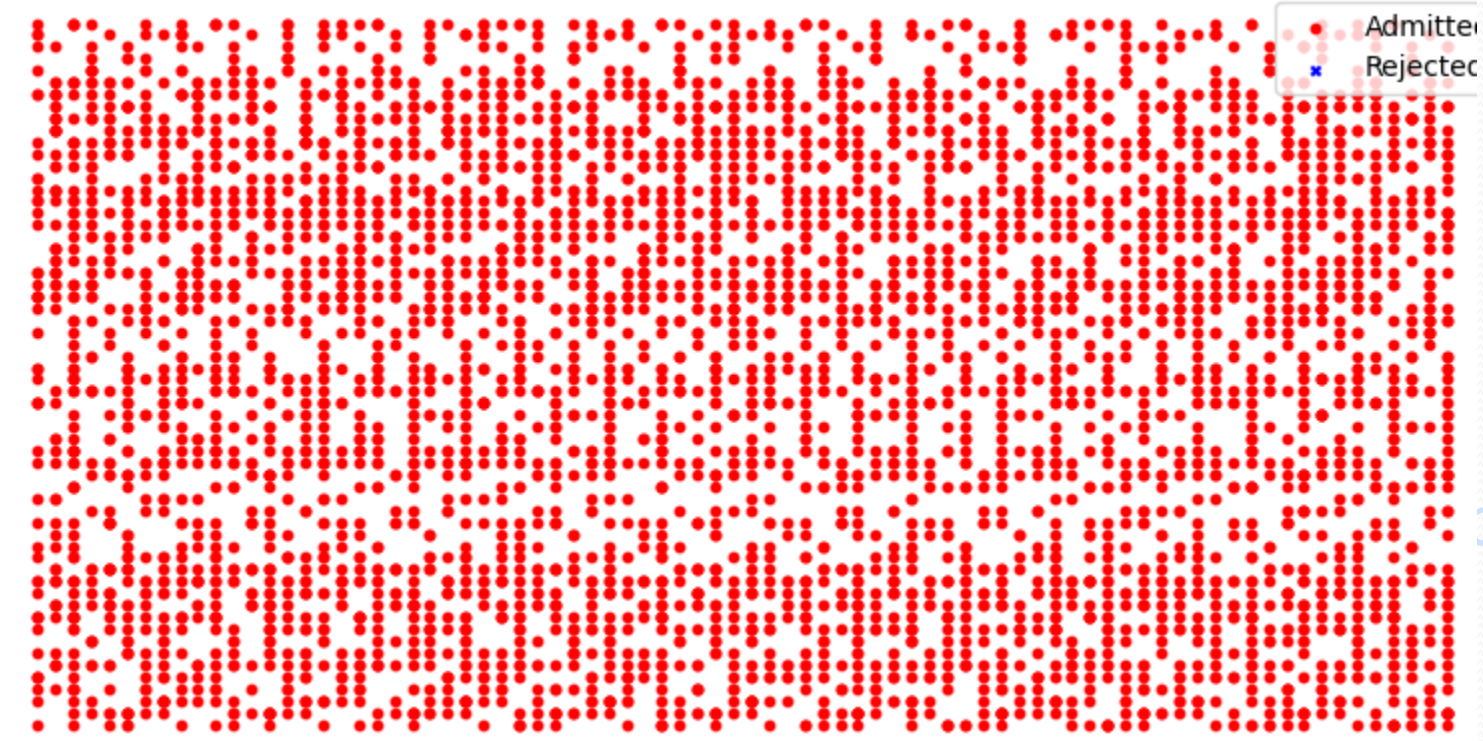
- 选取：

```
m = 199 * 199 * 49681  # 控制在40000*50000<2^31=21,4748,3648
a = 199 * 49681 + 1
c = 17017  # 7*11*13*17 避开800*600画布的质因数
```

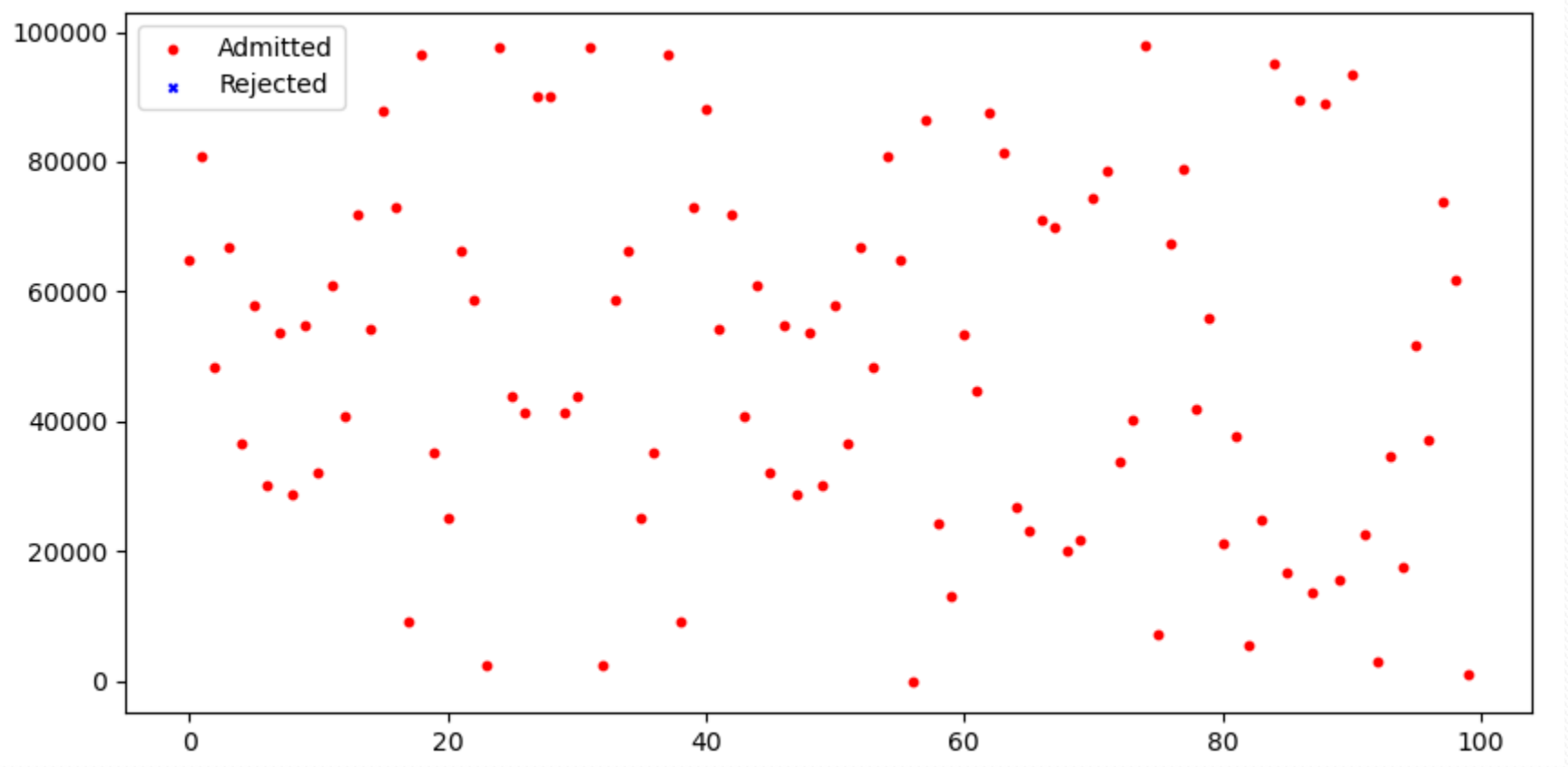
- 避开画布尺寸的质因数

# 实验三：

- 可以看出虽然并不完全，但是循环明显



- 可以看出有类似低谷的V字出现



# 实验四：

- 选用2**31-1这个大素数的原根16807来做乘同余法

```
m = 2 ** 31 - 1
a = 16807
c = 0
```

- 很凑巧，计算机整型能装下的最大的数竟然是个素数
- 这个选取就很科学了，参考了文献，学习了欧拉函数、欧拉定理、原根、群、剩余系，知道了同余方程中一次（也就是线性）下的性质，不光有加同余、乘同余还有混合同余、除同余。而网上大多标题写的线性同余生成随机数并没有明确说明，实际上使用的是混合同余法。
- 也知道了原根和平方剩余这两个概念是数论的两颗明星

- 乘法是快速的加法，而自乘是升维的基石。
- 本来以为加法拥有最普遍的交换律、结合律、反身性、对称性、传递性
- 向上一维，乘法多了分配律，延伸到矩阵已经很了不起，延伸到多项式、延伸到微积分求导法则等等
- 再向上一维，幂乘又变成了加法
- 再向上N维，都可参照幂乘
- 之后便拓展了数域，实数域到复数域，以后还有四元数、八元数

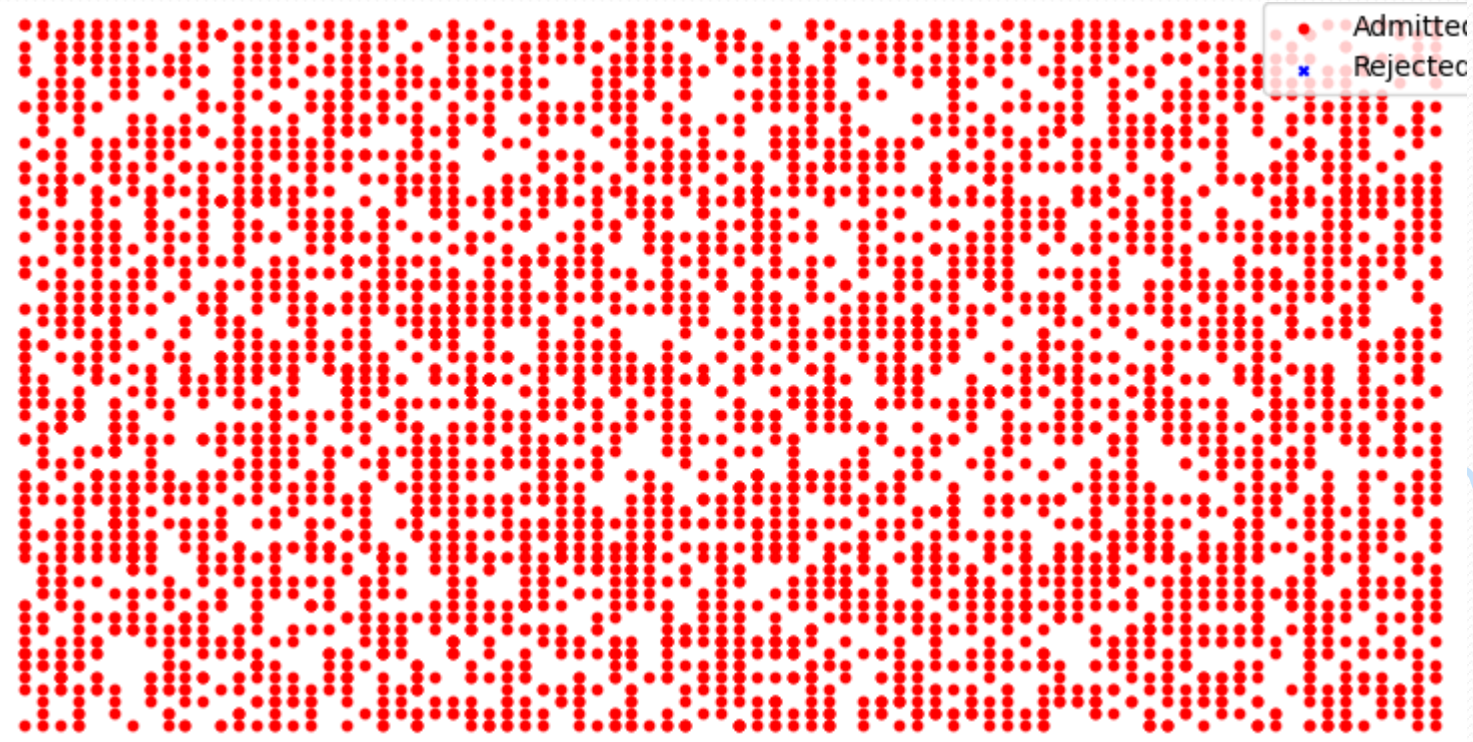
# 实验五：

- 选取：

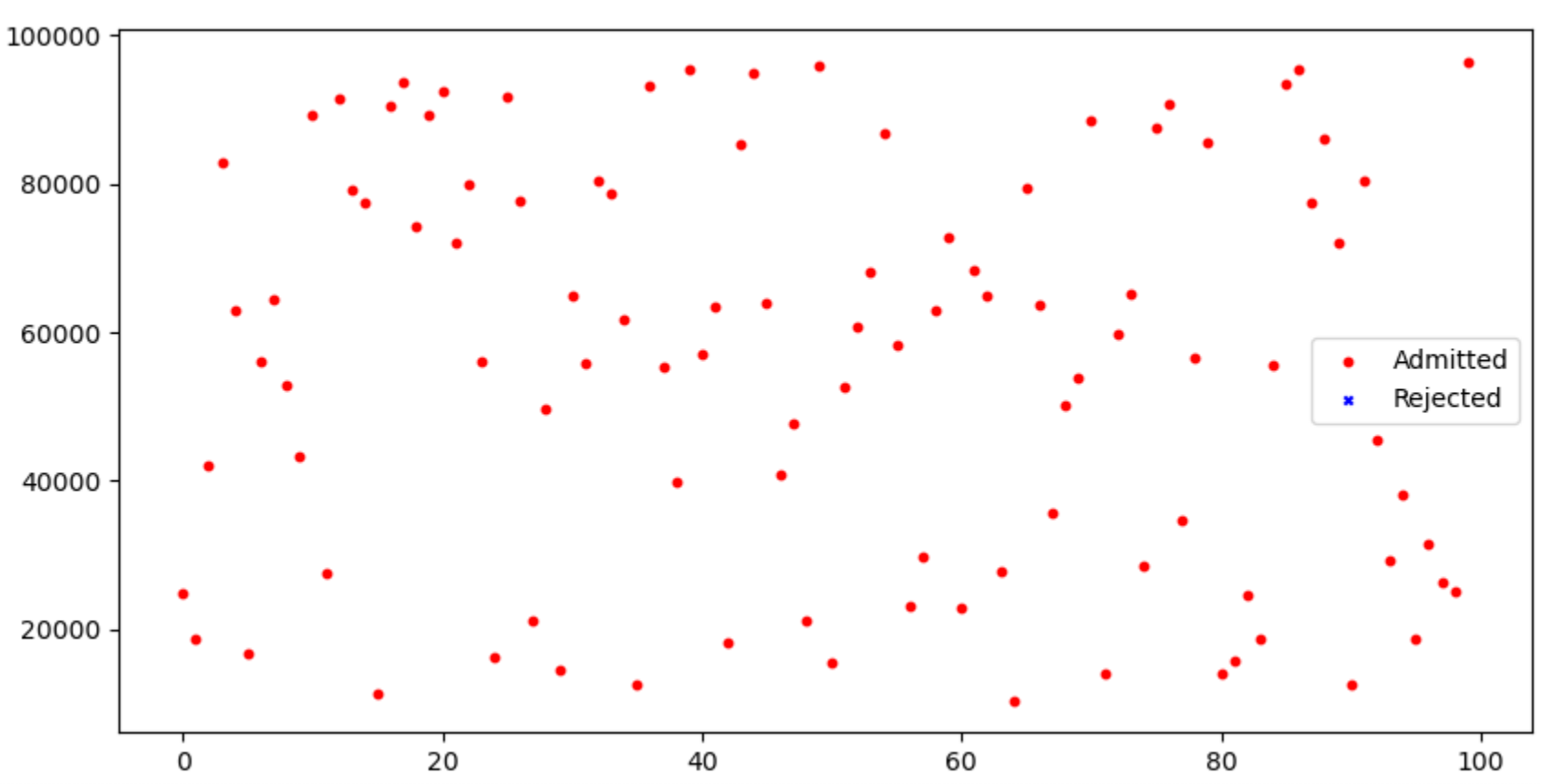
```
m = 100003
a = 16807
c = 0
```

# 实验五：

- 肉眼已找不到规律



- 可以看出和系统产生的随机分布有的一拼



# 乘同余产生随机数原理

## 原根

阶：设 $a, m \in \mathbb{N}^+$，且 $a \perp m$，使 $a^x \equiv 1 (\bmod m)$ 成立的最小正整数 $x$，称为 $a$ 模 $m$ 的阶，记为 $\mathrm{ord}_m\, a_0$

原根：设 $g, m \in \mathbb{N}^+$，且 $g \perp m$；若 $\mathrm{ord}_m\, g = \varphi(m)$，则称 $g$ 是模 $m$ 的原根。

定义原根的意义在于，原根非常类似于单位根，故有一些很好的性质，比如说我们考虑当 $m$ 是质数时，原根有如下等价定义：若 $g$ 是模 $m$ 的原根，则 $g^1, g^2, \cdots, g^{m-1}$ 的值在模 $m$ 的意义下两两不同，注意到模$m$剩余系中恰有$m$个数，而任意一个非零数的幂次都不可能等于0，故原根的幂次在模$m$的剩余系中是最稠密的，换句话说，仅用原根就能够充分表示模 $m$ 剩余系的性质。

# 整数模n乘法群

- 在同余理论中，模 n 的互质同余类组成一个乘法群，称为整数模 n 乘法群，也称为模 n 既约剩余类。在环理论中，一个抽象代数的分支，也称这个群为整数模 n 的环的单位群（单位是指乘法可逆元）。

# 原根的枚举找法

- 阶
  - 对于(a,n)=1的整数，满足a^r≡1 (mod n ) 的最小整数r,称为a模n的阶。
- 判断一个数a是不是n的原根，需要判断φ (n)是否是a的阶

- 这和加同余可以遍历模内数据的道理相同。但是不同的是，加同余肉眼可见的规律性。在乘同余中不容易显现
- 伪随机数之所以伪是因为其规律性可预知，周而复始循环往复。但是在人生苦短的这一刹那，周期大到你无力承受，种子选取、轮询的韵律已经对你短暂到失去了意义，那么这个随机就已经可以改变你的一生。

- 验证以上结论，需要工具PyCharm、Clion。网上有很多python源代码，需要画图numpy、matplotlib.pyplot支持库，需要扩展欧几里得算法解同余方程、需要欧拉函数、需要暴力算法求原根、需要筛法求素数、需要混合同余法、需要分解因数等等
- 其中最难的还是求原根，python就远不如C++效率高了，最后还好电脑上有C语言的环境。
- 另外大多数公式截图来源于Atom+latex截图。

# 线性同余方程求解

小圆滚滚

## 1 问题描述

解方程 $13x \equiv 6(mod 34)$ （1）

对该方程求解的步骤为先求特解，再乘以系数得到通解：

步骤1：$13x + 34y = 1$,得到x的所有取值使得等式右端的值为1。

步骤2：对上述方程的左右两端同时乘以6，然后系数13和34不变，用新的x代替原始的x，即得到方程的通解。

## 2 贝祖定理求特解

如果a、b是整数，那么一定存在整数x、y使得ax+by=gcd(a,b)

Greatest Common Divisor(GCD)

换句话说，如果ax+by=m有解，那么m一定是gcd(a,b)的若干倍。

拓展欧几里得就是求关于x,y的方程 ax + by = gcd(a,b) 的所有整数解。

我们知道，欧几里得公式可以由这个式子表示：

$$gcd(a,b) = gcd(b, a\%b)$$

不断往下连等，直到b=0，此时a即为最大公约数.

那么我们来讨论另一个问题，下面两个式子有没有关系呢？

$$a * x_1 + b * y_1 = g(a,b)$$

$$b * x_2 + (a\%b) * y_2 = g(b, a\%b) \qquad (\text{让a,b=b,a\%b})$$

只要找出$x_1$和$x_2$的关系、$y_1$和$y_2$的关系，我们就能求出方程$a * x + b * y = g$的一个特解.

回到刚才那个问题，很显然，两个等式右边就是欧几里得的公式

那么我们就能得出$a * x_1 + b * y_1 = b * x_2 + (a\%b) * y_2$

其中a%b可以换成$a - (a//b) * b$ (地板除)

式子变成了

$$a * x_1 + b * y_1 = b * x_2 + (a - (a//b) * b) * y_2$$

因为我们要找x1、y1和x2、y2的关系，

我们可以用待定系数法，按照这种方法把右边化成$b*(x_2-(a//b)*y_2)+a*y_2$

则等式变成了

$$a*x_1+b*y_1=a*y_2+b*(x_2-(a//b)*y_2)$$

现在得出了下面两个等式：

$x_1=y_2$ （等式两边a的系数相同）

$y_1=x_2-(a//b)*y_2$ （等式两边b的系数相同）

也就是说，我们知道了方程$b*x_2+(a\%b)*y_2=g(b,a\%b)$的解$x_2,y_2$，就可以得到方程$a*x_1+b*y_1=g(a,b)$的解$x_1,y_1$了，这个小问题告一段落。

对于方程$a*x+b*y=gcd(a,b)$，我们可以不断的往下变成$b*x+(a\%b)y=gcd(a,b)$，按照欧几里得的过程，b会变成0，即此时方程$a*x+b*y=gcd(a,b)$因为b=0，变成了$a*x=gcd(a,b)$，还是由欧几里得算法得到，此时a就等于gcd(a,b)，所以得到由原方程往下推了不知道多少次的方程$a*x=gcd(a,b)$来说，得到一个解x=1, y=0。现在得到了这个方程的解，再回溯回去，就可以得出原方程$a*x+b*y=gcd(a,b)$的一个特解。

## 3 具体实现

特解求取：

13x+34y=1

a=13,b=34

$\because a < b \therefore$ 倒推的最后一步为：$a = 34, b = 13$

$x_1 = y_2$ （等式两边a的系数相同）

$y_1 = x_2 - (a//b) * y_2$ （等式两边b的系数相同）

| $\begin{cases} x_1 = -13 \\ y_1 = 5 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = -3 - 34//13 * 5 = -13 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = 2 - 13//8 * (-3) = 5 \end{cases}$ |
|---|---|---|
| (13,34)⇒ | (34,13)⇒ | (13,8)⇒ |

| $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 - 8//5 * 2 = -3 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 1 - 5//3 * (-1) = 2 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 - 3//2 * 1 = -1 \end{cases}$ |
|---|---|---|
| (8,5)⇒ | (5,3)⇒ | (3,2)⇒ |

| $\begin{cases} x_1 = y_2 = 0 \\ y_1 = x_2 - (a//b) * y_2 = 1 - 2//1 * 0 = 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ |
|---|---|
| (2,1)⇒ | (1,0) |

列表中，第二行向右推出1，0，然后第一行开始由最后向前反推。

通解

对方程13x+34y=1的左右两端除以34取余可得：

$13x \equiv 1(mod 34)$

即x=-13是上述方程的一个特解，对上述方程的左右两端同时乘以6可得

$13 * (6x) \equiv 6(mod 34)$的一个特解为-78，则13x=6(mod 34)通解为：

x=-78+34k,其中k是任意整数；

即通解为：

x=-10+34k,其中k是任意整数

## 4　青蛙相遇问题：

两只青蛙在网上相识了，它们聊得很开心，于是觉得很有必要见一面。它们很高兴地发现它们住在同一条纬度线上，于是它们约定各自朝西跳，直到碰面为止。可是它们出发之前忘记了一件很重要的事情，既没有问清楚对方的特征，也没有约定见面的具体位置。不过青蛙们都是很乐观的，它们觉得只要一直朝着某个方向跳下去，总能碰到对方的。但是除非这两只青蛙在同一时间跳到同一点上，不然是永远都不可能碰面的。为了帮助这两只乐观的青蛙，你被要求写一个程序来判断这两只青蛙是否能够碰面，会在什么时候碰面。我们把这两只青蛙分别叫做青蛙A和青蛙B，并且规定纬度线上东经0度处为原点，由东往西为正方向，单位长度1米，这样我们就得到了一条首尾相接的数轴。设青蛙A的出发点坐标是x，青蛙B的出发点坐标是y。青蛙A一次能跳m米，青蛙B一次能跳n米，两只青蛙跳一次所花费的时间相同。纬度线总长L米。现在要你求出它们跳了几次以后才会碰面。

$x + mt - (y + nt) = pL(p \in Z)$　x,y代表了两个不同的起点，m,n代表了不同的次数

即$(n - m)t + Lp = x - y(L > 0)$

即求一次（线性）同余方程$At \equiv B(modL)$的最小正整数解，其中A=(n-m), B=x-y，A是系数，B是余数。

如同$At + nL = B$　　$n \in Z$　转为了二元一次不定方程的问题

1. 判断有根：二元一次不定方程$ax + by = c$有解，当且$gcd(a, b)|c$　(翻译：a、b两数的最大公约数能整除c，请注意除和除以是有区别的。被除数除以除数等于商。除数除被除数等于商).裴蜀定理

2. 求ax+by=gcd(a,b)的解，　X,Y

   $Ax \equiv B(modL)$　　(1)

   若 d = gcd(A, B)，d 整除 B ，那么B/d为整数。由裴蜀定理，存在整数对 (t,n) （可用辗转相除法求得）使得 At+nL=d，$\frac{AtB}{d} + \frac{nBL}{d} = 1 \times B$因此$x_0 = tB/d$是方程 (1) 的一个解。其他的解都关于L/d与$x_0$同余。即$x = x_0 + (B/d) \times r \ (mod \ L)(0 \le r \le d - 1)$。

3. 扩展欧几里得算法解得原方程提取公因数之后，化简到等式$ax + by = c$，当c=1时有一组特解：(这里很有意思，是我先知道结果肯定是有，然后再考虑如何去求取，逆向思维) $\begin{cases} X^* = \frac{X}{\frac{c}{gcd(a,b)}} \\ Y^* = \frac{Y}{\frac{c}{gcd(a,b)}} \end{cases}$

4. 则其所有解为：$\begin{cases} x = X^* \times \frac{c}{gcd(a,b)} + \frac{b \cdot t}{gcd(a,b)} \\ y = Y^* \times \frac{c}{gcd(a,b)} - \frac{a \cdot t}{gcd(a,b)} \end{cases}$　　$t \in Z$

例：

# 5 线性同余算法生成随机数

混合同余法：



$$\begin{cases} seed = (a * seed + c)\%m \\ return\ seed/float(m) \end{cases}$$

根据Hull-Dobell Theorem，需要满足：

1. c与m互质
2. m的所有质因数都能整除a-1
3. 如果m能被4整除，那么要求a-1也能被4整除

# 7 枚举法求原根，并加快

怎么找原根？

设m是大于1的正整数，如果(a,m)=1,则使同余式

$a \equiv 1(mod\ m)$

成立的最小正整数d称为a对模m的指数（或阶），记作$ord_m(a)$.

如果a对模m的指数是$\phi(m)$，则a称为模m的一个原根。

欧拉定理:a与m互质时,$a^{\phi(m)} \equiv 1(mod\ m)$,其中$\phi(m)$称为对模m缩系的元素个数.

判断一个数a是不是m的原根，需要判断$\phi(m)$是否是a的阶.

比如我们要判断a模n=37的阶是否为36，那么只需找出36的两个质因子2和3，判断36/2和36/3作为a的幂的指数时，(a的幂) mod n是否为1。如果a的阶为36/4，36/9，36/6，36/12,…，其实情况已

5模18的阶是$\phi(18)=6$，1,5,7,11,13,17，正是与18互质的那6个数啊，

$5^6 \equiv 1(mod\ 18)$，所以5是18的原根.18的欧拉函数值是6.

判断是否有原根：

若m有原根，则m一定是下列形式:$2, 4, p^a, 2p^a$，这里p为奇素数，a为正整数.

欧拉函数通式：

$$\phi(m) = m \prod_{\substack{p \mid m \\ \text{p为质数}}} (1-\frac{1}{p}) = m(1-1/p_1)(1-1/p_2)(1-1/p_3)(1-1/p_4)\cdots(1-1/p_n)$$

,其中p1, p2……pn为x的所有质因数，m是不为0的整数. ϕ(1)=1（唯一和1互质的数(小于等于1)就是1本身）。 (注意：每种质因数只一个。比如12=2*2*3那么ϕ（12）=12*（1-1/2）*(1-1/3)=4

比如说求81的所有原根:

1.先算81的欧拉函数，结果为54, 又54的素因数有2和3, 54除以这两个素因数得到18和27

2. 从2，4，5开始验算$2^{18} \not\equiv 1(mod\ 81)$,$2^{27} \not\equiv 1(mod\ 81)$, 所以2是81的原根（只要找到一个由素因数得出来的次数mod81不等于1的就可以停止了）

3.原根的个数就是就81算两次欧拉函数，得到18，那就用18个原根，54的简化剩余系的各个数字作为第二步找到的原根的次数就行

54的简化剩余系（其实就是与54互素的）为1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47,49,53

那么81的所有原根为 $\{2^1, 2^5, 2^7, 2^{11}, \cdots, 2^{53}\}$，不要忘了，里面的值还要mod81的哦

即 $\{2^1 mod\ 81, 2^5 mod\ 81, 2^7 mod\ 81, 2^{11} mod\ 81 \ldots\ldots\ldots\ldots 2^{53} mod\ 81\}$