简谐运动

小圆滚滚

1 问题描述

上高中的时候，物理超前班的老师给我们讲了个假设，把地球挖个洞，打穿到地球的另一面，把一个铁球扔进去。然后算出来铁球和单摆的运动周期相同。仅仅是公式上联想到了相同。

直到现在，我看了傅里叶变换。自己复刻了逗比手写时钟的平面直角坐标系到两轴配合的极坐标系的无缝转化。才知道，原来方程式两端对消。剩下的才是真理。

2 起因结果

凡是跟圆有关的，肯定有π.这是一个比例，一个比值。一个极限。一个无穷。

一个方波是由无数正弦波叠加而成。在一个大圆的轨道上运行着一个小圆的滚滚叠加。

活塞运动是将一个圆的运动投影到了一个直线上。

傅里叶变换从侧面看就是频率方向和时空方向的叠加。

3 定义

简谐运动是最基本也最简单的机械振动。当某物体进行简谐运动时，物体所受的力跟位移成正比，并且总是指向平衡位置。它是一种由自身系统性质决定的周期性运动（如单摆运动和弹簧振子运动）。实际上简谐振动就是正弦振动。

定义

物体受力大小与位移成正比，而方向相反，人们把具有这种特征的振动称为简谐运动。

表达式

简谐运动方程：$x = Acos(\omega t + \varphi)$

根据该运动方程式，我们可以说位移是时间t的正弦或余弦函数的运动是简谐运动。简谐运动的数学模型是一个线性常系数常微分方程，这样的振动系统称为线性系统。线性系统是振动系统最简单最普遍的数学模型。但一般情况下，线性系统只是振动系统在小振幅条件下的近似模型。

4 特征量

周期

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

单摆周期

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

单摆的周期与单摆的质量无关。与单摆的振幅无关。所以单摆可以当作计时器。

4.1 图片展示

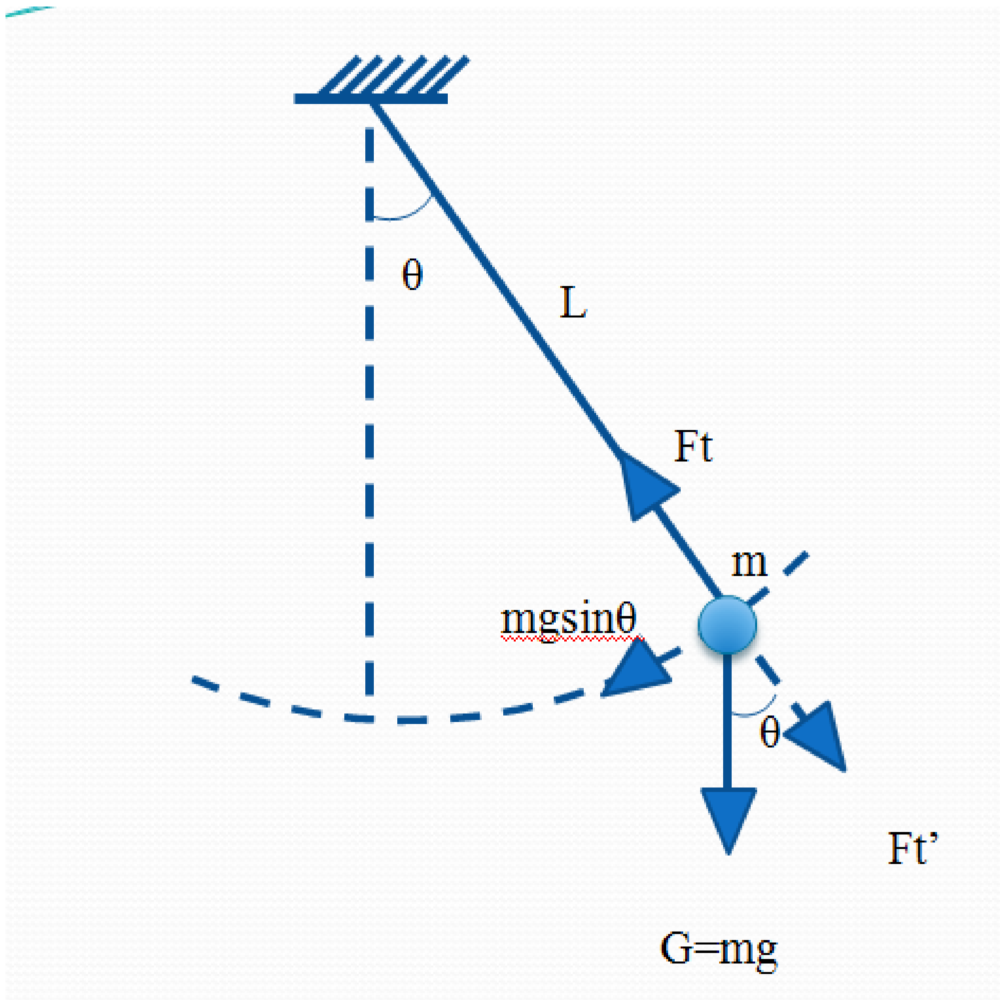

图 1: 单摆受力分析

根据图片1可知aaa单摆受力 aaa

图1所示的单摆中，摆线长度为L，忽略单摆过程中空气阻力的影响，小幅度摆动最大角度为 θ 。若假定 θ ¡5度，则利用等价无穷小$sin\theta \approx \theta$

可知，重力对小球的力矩为$M_z = mgLsin\theta \approx mgL\theta$

根据刚体定轴转动定律

$M_z = J\beta$

其中M_z表示对于某定轴的合外力矩，J表示刚体绕给定轴的转动惯量，β 表示角加速度。

又$\because J=mL^2$（质量转动惯量）, $\beta=\frac{d^2\theta}{dt^2}$
$\therefore M_z=mgL\theta=mL^2\times\frac{d^2\theta}{dt^2}$
$\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{g}{L}\times\theta$

可以看出这个等式就是简谐振动的规律式，θ相当于位移x，因此单摆也是一种简谐振动。其角频率$\omega=(\frac{g}{L})^{(\frac{1}{2})}$，周期就是$T=2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$，只要测得摆线的长度L和周期T，就可以非常方便地测出当地的重力加速度。

我们知道一个运动的物体，其动能$E_k=\frac{1}{2}mv^2$，对于弹簧振子来说，弹性势能就是$E_p=\frac{1}{2}kx^2$，这样弹簧振子的动能就表示为$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2\times A^2$，弹性势能就表示为$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$。其中k表示弹簧的劲度系数，A表示质点振动的最大位移。

回复力f = -kx
$f=m\frac{d^2x}{dt^2}$
$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$
令$\omega^2=\frac{k}{m}$
$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2=0$ ——简谐运动微分方程
$a=-\omega^2x$

当物体位于平衡位置时，势能为零，最大动能为$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2\times A^2$，当物体位于最大位移处时，动能为零，弹性势能最大值为$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2$，可见弹簧振子的总能量是保持不变的，动能与势能指尖相互转化，如图2所示，任意时刻弹簧振子的总能量等于两者之和，也就是理想弹簧振子的机械能是守恒的。

4.2 图片展示

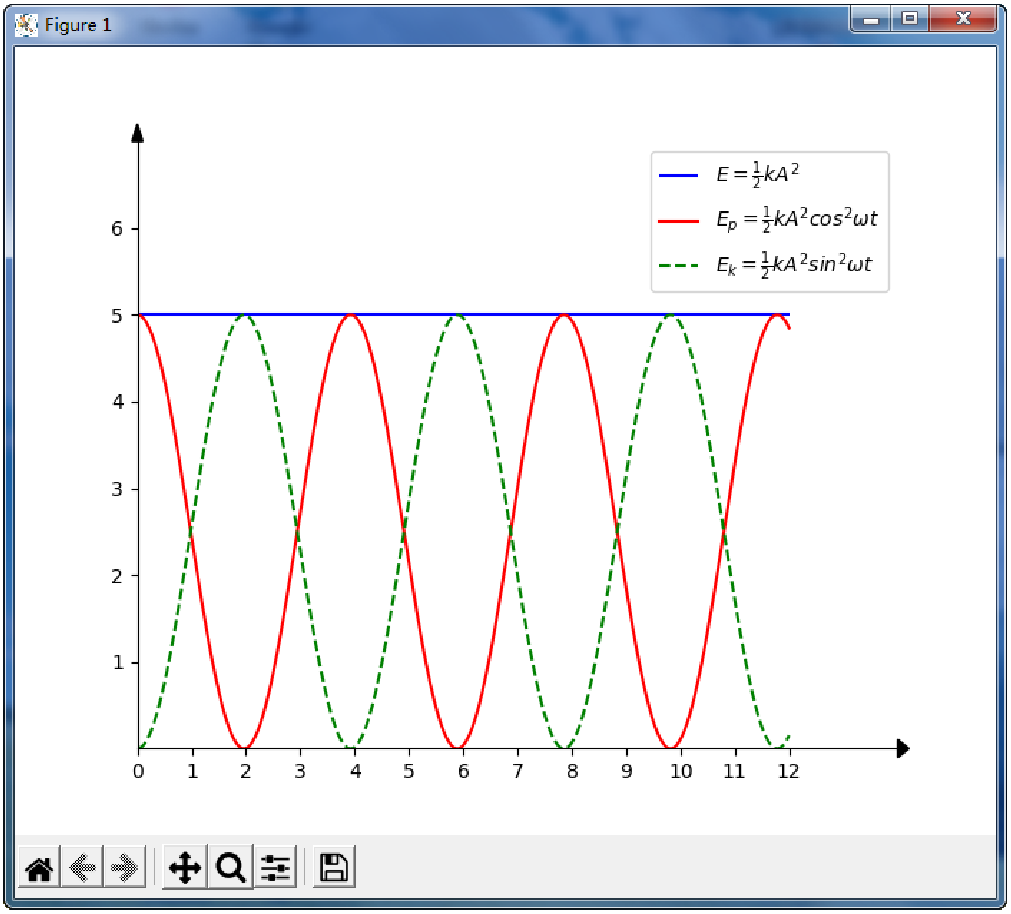

图 2: 势能守恒

根据图片2可知aaa势能守恒aaa
简谐运动的振动动能
$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2sin^2(\omega t + \varphi_0)$
振动势能为
$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2cos^2(\omega t + \varphi_0)$
简谐运动的总机械能
$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$

5 穿过地球的直径

如果把地球打穿，然后人跳进去，忽略所有的阻力，这个人会沿着地心做简谐运动（周期性运动，e.g 单摆，弹簧）。

简谐运动公式:

时间、位移$d(t) = x_0sin(\omega t)$

速度（对上式求导）$v(t) = \frac{d}{dt}d(t) = -x_0\omega cos(\omega t)$

加速度（对上式求导）$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = -x_0\omega^2sin(\omega t) = -\omega^2d(t)$

简谐运动速度的方程又可以写成：

$v = \pm\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$

推导：

简谐运动的总能量为物体动能加弹性势能，也等于在最大振幅处的弹性势能。

$E_{Total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$

所以

$mv^2 = kA^2 - kx^2$

$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) = \omega^2(A^2 - x^2)$

5.1 图片展示

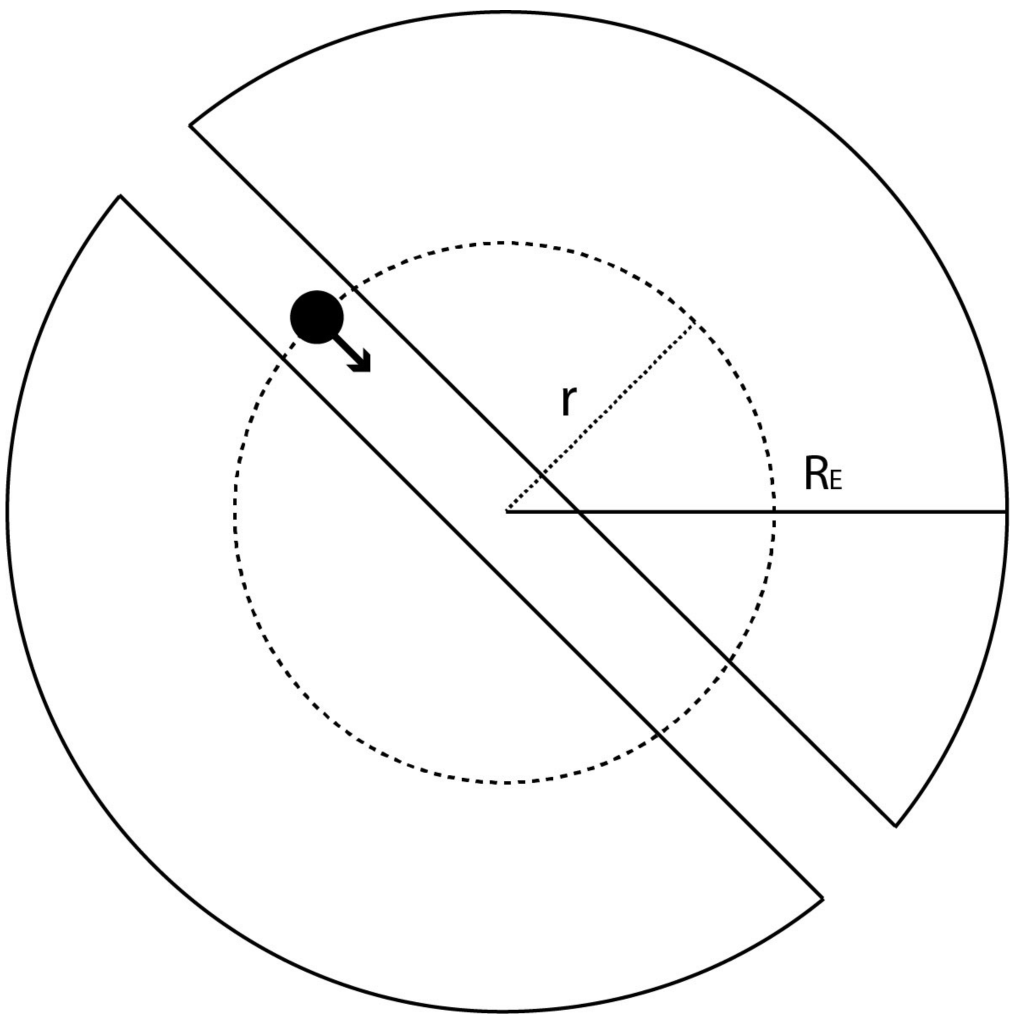

图 3: 穿透地球

根据图片3可知aaa 穿透地球 aaa

物体在其中的只受万有引力

$F = \frac{GMm}{r^2} = -\frac{G\frac{4}{3}\rho\pi r^3 m}{r^2} = -\frac{4}{3}G\rho\pi rm$

对比简谐运动皆满足$F = -kx$，（x为r）

在根据牛顿第二定律$F = ma$和简谐运动加速公式$a = -\omega^2 x$

$\frac{4}{3}G\rho\pi rm = \omega^2 rm$

$\omega^2 = \frac{4}{3}G\rho\pi$

加速度和周期的关系

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\rho\pi}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$

也可以直接用圆周运动和万有引力推导：

$F = \frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi}{T^2}r$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

这个周期不只仅适用于穿过地心的通道，任何通道都适用此周期

5.2 图片展示

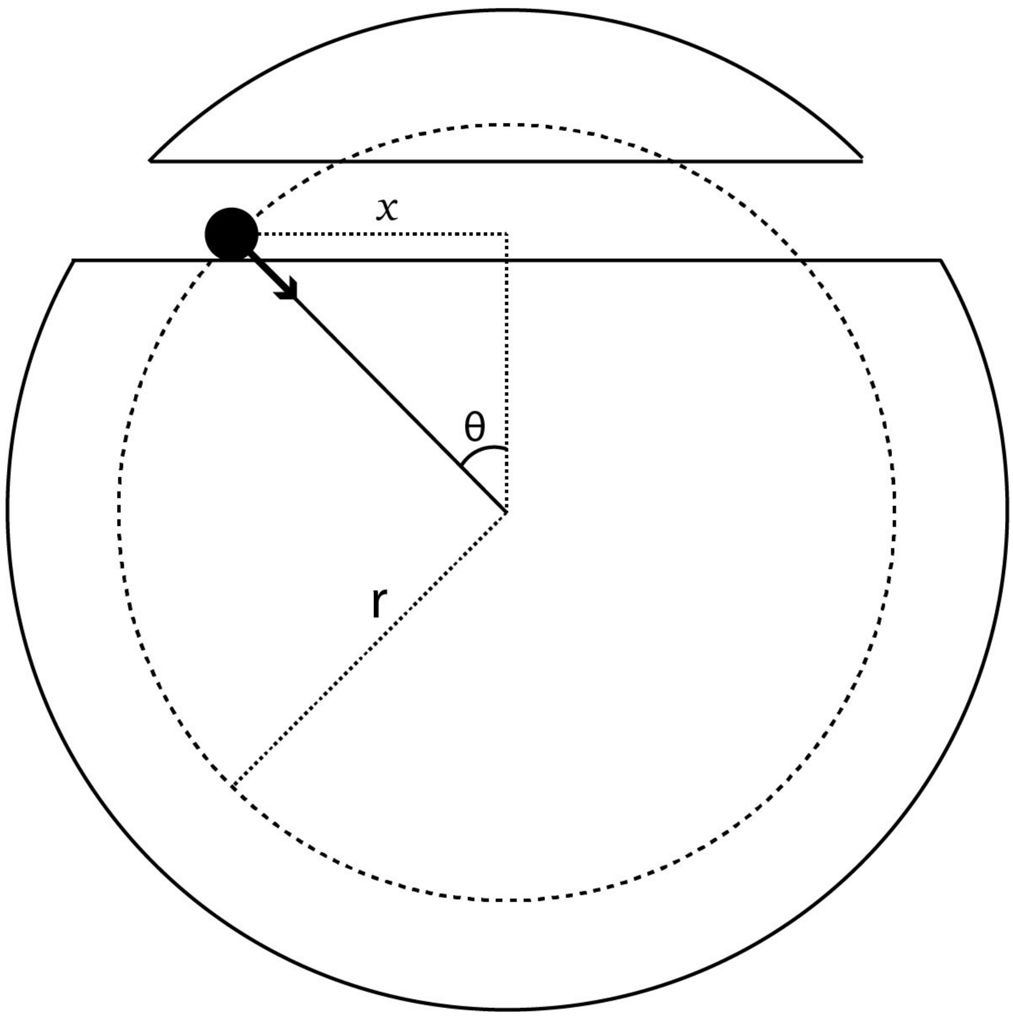

图 4: 穿透地球2

根据图片4可知aaa 穿透地球2 aaa

物体受力：

$F = F_g \times sin\theta = \frac{GMm}{r^2} \times \frac{x}{r} = -ma$
$a = -\frac{GMm}{r^3} = -\omega^2 x$
$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} = \frac{\frac{4}{3}G\rho\pi r^3}{r^3} = \frac{4}{3}G\rho\pi$

和上面情况一样，所以可以得知无论通道是怎么打的，你都会在$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$秒之后从地球的另一端出来，然后重新掉出来。