导数的含义 $y = x^2$

小圆滚滚

1 导数的定义

导数（Derivative），也叫导函数值。又名微商，是微积分中的重要基础概念。当函数y=f(x)的自变量x在一点x0上产生一个增量Δx时，函数输出值的增量Δy与自变量增量Δx的比值在Δx趋于0时的极限a如果存在，a即为在x0处的导数，记作f'(x0)或df(x0)/dx。

1750年，达朗贝尔在为法国科学院出版的《百科全书》第四版写的“微分”条目中提出了关于导数的一种观点，可以用现代符号简单表示：$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。

1.1 x^2的导数为什么是$2x$

解：设$y = x^2$，给x一个增量Δx，那么相应地，函数的增量$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$，两边同除以$\Delta x$，便得$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$，两边取极限便得：$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$

2 意义理解

17世纪生产力的发展推动了自然科学和技术的发展，在前人创造性研究的基础上，大数学家牛顿、莱布尼茨等从不同的角度开始系统地研究微积分。牛顿的微积分理论被称为“流数术”，他称变量为流量，称变量的变化率为流数，相当于我们所说的导数。牛顿的有关“流数术”的主要著作是《求曲边形面积》、《运用无穷多项方程的计算法》和《流数术和无穷级数》，流数理论的实质概括为：他的重点在于一个变量的函数而不在于多变量的方程；在于自变量的变化与函数的变化的比的构成；最在于决定这个比当变化趋于零时的极限。

微商的意义在于对于自变量x因变量y的变化如果是定值，那么就是y对x的比例。如果这个比例是变化的（非定值），那么这个变化就可以用导数来进行研究和描述。

而商的意义在于对于除数，除数如果为1，也就是不管除数是小数还是倍数，除法做完之后，都会按照除数的1个完整单位去理解被除数。看到被除数是除数的几倍。

微商的意义就在于当除数这个完整单位1，作为1的单位，越来越小，不是小数，而是这个1本身越来越小，从一个分子、变成一个原子、变成一个能量波子（费米子、玻色子最终无法探测，只能得到性质。电子是费米子的典型，光子是玻色子的典型。），而是可以切分成很小的块时，这个增量的小块被越切越小，小到越来越接近增量的那个点。被除数与除数的比值是不是趋近于一个极限。如果存在，那么这个变化就有深入研究的意义，就可以利用。如果对于函数上的一点，这个很小的块越来越浓缩，浓缩到这个点上时，存在这样的一个极限值。在看能不能推广到函数的其他各点。

2.1 图片展示

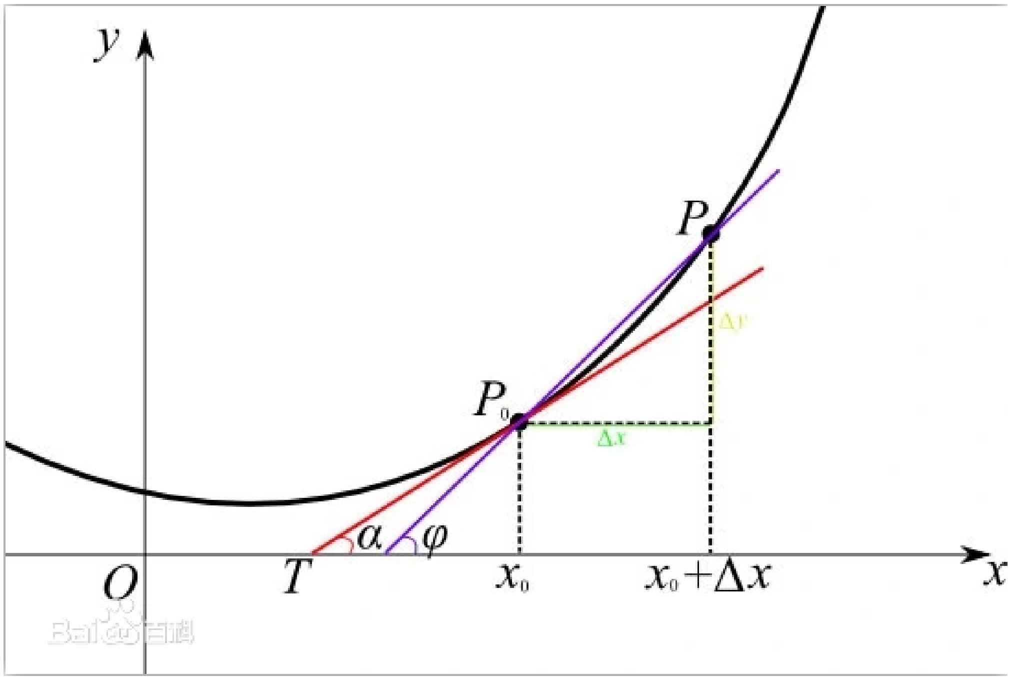

图 1: xln（***）的函数图像

根据图片1可知导数含义

3 意义理理解

同济大学高等数学教材中，给出导数举例是，没有从1而2，而是直接从1而高阶。虽然涵盖了2，但是很难让人从第一步开始迈出去。本文第一章已补充了第一步，这里重复一下同济大学的第二步：

求函数$f(x) = x^n \quad (n \in N_+)$的导数.

解　当n=1时，$f'(x) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{k\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = 1$;

当$n > 1$时，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{k\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} h + \cdots + h^{n-1} \right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

即

$$(x^n)' = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ nx^{n-1}, & n > 1 \end{cases}$$