无穷递降法的证明

小圆滚滚

1 证明某些数开方就是无理数

若n∈N*，且n不是完全平方数，请证明： $\sqrt{n}$ 是无理数.

首先假设命题成立， $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$

变形得到： $nq^2=p^2$ ………①

显然$\sqrt{n}=\frac{p}{q}$ 不是整数，故可以用正整数 m 表示为：

$m<\frac{p}{q}<m+1$，即： $0<p-mq<q$ ………②

我们可以通过①式构造出新的整数 q_1,q_2 来表示原本的 $\sqrt{n}$ ：

两边同时减去 mpq，观察发现两侧各多出一个p、q的公因式，这正是我们想要的：

$nq^2-mpq=p^2-mpq$ ；

$\frac{p}{q}=\frac{nq-mp}{p-mq}$ ………③

我们的目的是使新的比值③的分子分母能组成新的数列，来看一下它们是否符合要求：

分子 $nq-mp=\frac{p^2}{q}-mp=p(\sqrt{n}-m)$ ………④.

$\sqrt{n}$在数轴上的位置 $m<\frac{p}{q}<m+1$ 说明了 $\sqrt{n}>m$ ，故分子大于零.

同样变形得到的②式，说明了分母 $p-mq>0$，于是我们便可以构造：

$p_1=nq-mp$, $q_1=p-mq$

即： $\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}$

新的p、q并没有什么不同，且容易证明分别小于对应的原式p、q（根据④中括号内小于1和③式分母），于是我们就可以接着进行这样的操作，构造出：

$\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\cdots$

但因为p、q是有限的，这样的延申不可能一直持续下去，故我们可以得出矛盾.

从而所证命题成立.

这个方法不仅可以在延申的最终处得到矛盾，还可以在延申的末端产生符合条件的解，是一种“寻找”解的方法：

2 证明某些数是完全平方数

例二：设非负整数 a、b 使得 $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ 为整数. 求证：这个整数一定是完全平方数.

设 $k=\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ ，先来对a、b的大小关系进行讨论：

$a=b$ 时： $k(1+a^2)=2a^2$, 解得 $a=k=1$

设 $0\leq b<a$: 当 $b=0$ 时， $k=a^2$ 显然k是一个完全平方数.

最终可以讨论： $0<b<a$ 的情况，

整理 k 的表达式，得到类似二次方程的形式：

$a^2-kba+b^2-k=0$ ………①

先以 a 为变量，b固定不动，①式改写为：

$x^2-kbx+b^2-k=0$

a 是该方程的一个解，设另一个解为 a_1 ,应用韦达定理可以得到：

$a+a_1=kb, aa_1=b^2-k$

通过和式，可以得出 a_1 是整数，通过两根之积，可以得到：

$a_1=\frac{b^2-k}{a}<\frac{b^2}{a}$ ；

b/a小于1，故： $a_1<b$.

我们发现，根据对称性，b 也是当 a 固定时的满足该方程的一个根. 对根a_1和 b 其进行同样的操作，我们可以得到一个新的根b_1, 如此循环下去，我们就可构造出想要的递减数列了.

为此，我们来看看新的根是否也满足大于零的需求：

把 a_1 代回方程：

$0=a_1^2-kba_1+b^2-k=a_1^2+b^2+k(-ba_1-1)$

若括号内的 a_1 小于零时，整个式子大于单独的 $a_1^2+b^2$ ，也就大于0. 0¿0是矛盾的，故 a_1 必须大于等于零.

当a_1等于零时，我们又回到了最开始讨论 $0 \le b < a$的情形，因此，我们重复构造了数列：a, b, a_1, a_2 这些数列是从有限的数a开始递减的，最终一定会在某个数 a_i 处终止，终止时该数等于零. 开头已经讨论过，等于零时k一定是一个完全平方数.

于是，我们在递降的末端证明了k的存在性.

最后，不仅仅是数集可以使用无穷递降法，在最小值原理的应用中，还存在着几何解题的应用。这一篇回答便详细阐述了这些技巧和思想https://zhuanlan.zhihu.com/p/76910624

此两题已经被研究透彻，这里仅仅是做个人的思维梳理，以及强调在递降的末端出现矛盾和找处解的存在的差异。实际上例二的形式还有其他的推广，见下文：

设 a, b, c 为整数，若$0<a^2+b^2-abc \le c$ ，则 a^2+b^2-abc 为平方数. 当等号成立时为例二所述命题.

(上接第 68 页)

(注:若 $a^2+b^2-abc=c$,即 $c=\frac{a^2+b^2}{ab+1}$,即若 $ab+1$ 整除 a^2+b^2,则 c 为平方数. 故为上题的推广,即上题的证明仅仅只是 $a^2+b^2-abc=c$ 的情形)

证明:由题意 a,b 不全为零.

(1)若 a,b 中只有一个数为 0,则 a^2+b^2-abc 显然是平方数.

(2)当 $a\neq0, b\neq0$ 时,

由 $0<a^2+b^2-abc\leqslant c$ 及 $ab\neq-1$,

得 $c\geqslant\frac{a^2+b^2}{ab+1}>0$,进一步得 $ab>-1$,

根据题意 a,b,c 为整数,故有 a,b 同号,

不妨设 $a\geqslant b>0$

(若两数为负数时,可以令 $a'=-a, b'=-b$),

如此,设 $a^2+b^2-abc=t$,

则 $0<t\leqslant c$,继而整理得到 $a^2+b^2-abc-t=0$,

不妨设 $a+b$ 最小,即(a,b)为 $x^2+y^2-xyc-t=0$ 的正整数解中 $x+y$ 最小的解. 设 m 满足(m,b)是 $x^2+y^2-xyc-t=0$ 的另一组解,则有 $m^2+b^2-mbc-t=0$,化简得 $m^2+b^2=mbc+t$,即得 $mbc+t>0$,而由 $0<t\leqslant c$ 得 $0>-t\geqslant-c$,故 $mbc>-t\geqslant-c$,消 c 得 $mb>-1$,即 $mb\geqslant0$,消 b 得 $m\geqslant0$,另一方面,由$\begin{cases}a^2+b^2-abc-t=0,\\ m^2+b^2-mbc-t=0,\end{cases}$消 c 得 $am=b^2-t<b^2$,即 $m<\frac{b^2}{a}$,继而得 $0\leqslant m<b$,若 $0<m\leqslant b$,则与“(a,b)为 $x^2+y^2-xyc-t=0$ 的正整数解中 $x+y$ 最小的解”这个假设矛盾,故只能 $m=0$. 所以 $t=b^2$,即 a^2+b^2-abc 是平方数,证毕.

这道题目可以反映无穷递降法这种特殊归纳法的一角,希望在以后的证明题型中可以用到这样的方法,当然不仅仅是应用这种方法,更重要的是能够培养这样的逆向思维,包括公式的逆向,定理的逆向等等. 通过这样的证明,能拓展思维层面,做到多方位、多角度思考和解决问题.

背景图片源自画师焦茶.

3 无限连分数

$x = \sqrt{2}$

$x^2 = 2$

$x^2 - 1 = 1$

$(x+1)(x-1) = 1$

$x - 1 = \frac{1}{1+x}$

$x = 1 + \frac{1}{1+x}$

$x = 1 + \frac{1}{1+(1+\frac{1}{1+x})}$

同理可计算：

$x = \sqrt{3}$

$x^2 = 3$

$x^2 - 1 = 2$

$(x+1)(x-1) = 2$

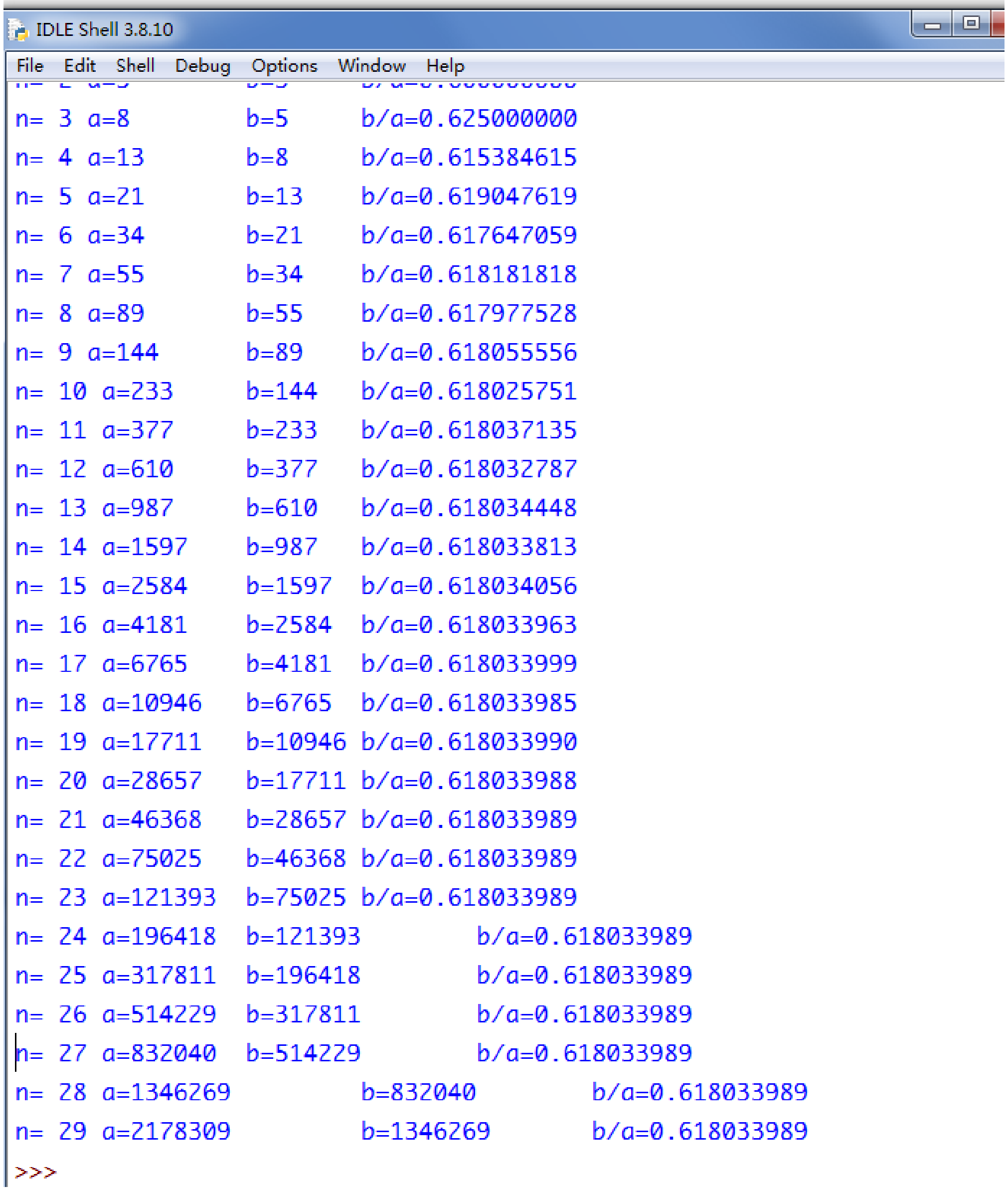
$x - 1 = \frac{2}{1+x}$

$x = 1 + \frac{2}{1+x}$

$x = 1 + \frac{2}{1+(1+\frac{2}{1+x})}$

利用迭代，可以精确逼近无理数

```python
a, b = 1, 1
for i in range(30):
    a, b = a + b, a
    print("n=", i, end=" ")
    print("a=%d" % a, "\tb=%d" % b, end="")
    print("\tb/a=%.9f" % (b / a))
```



IDLE Shell 3.8.10

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
n= 3 a=8	b=5	b/a=0.625000000
n= 4 a=13	b=8	b/a=0.615384615
n= 5 a=21	b=13	b/a=0.619047619
n= 6 a=34	b=21	b/a=0.617647059
n= 7 a=55	b=34	b/a=0.618181818
n= 8 a=89	b=55	b/a=0.617977528
n= 9 a=144	b=89	b/a=0.618055556
n= 10 a=233	b=144	b/a=0.618025751
n= 11 a=377	b=233	b/a=0.618037135
n= 12 a=610	b=377	b/a=0.618032787
n= 13 a=987	b=610	b/a=0.618034448
n= 14 a=1597	b=987	b/a=0.618033813
n= 15 a=2584	b=1597	b/a=0.618034056
n= 16 a=4181	b=2584	b/a=0.618033963
n= 17 a=6765	b=4181	b/a=0.618033999
n= 18 a=10946	b=6765	b/a=0.618033985
n= 19 a=17711	b=10946	b/a=0.618033990
n= 20 a=28657	b=17711	b/a=0.618033988
n= 21 a=46368	b=28657	b/a=0.618033989
n= 22 a=75025	b=46368	b/a=0.618033989
n= 23 a=121393	b=75025	b/a=0.618033989
n= 24 a=196418	b=121393	b/a=0.618033989
n= 25 a=317811	b=196418	b/a=0.618033989
n= 26 a=514229	b=317811	b/a=0.618033989
n= 27 a=832040	b=514229	b/a=0.618033989
n= 28 a=1346269	b=832040	b/a=0.618033989
n= 29 a=2178309	b=1346269	b/a=0.618033989
>>>
```

```python
import math

fenzi = 3
fenmu = 2

for i in range(30):
    fenzi, fenmu = fenzi + fenmu + fenmu, fenzi + fenmu
    print("n=", i, end=" ")
    print("a=%d" % fenzi, "\tb=%d" % fenmu, end="")
    print("\ta/b=%.9f" % (fenzi / fenmu))

print("2的开方是：", math.sqrt(2))
```

IDLE Shell 3.8.10

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
n= 10 a=47321	b=33461	a/b=1.414213562
n= 11 a=114243	b=80782	a/b=1.414213562
n= 12 a=275807	b=195025		a/b=1.414213562
n= 13 a=665857	b=470832		a/b=1.414213562
n= 14 a=1607521		b=1136689		a/b=1.414213562
n= 15 a=3880899		b=2744210		a/b=1.414213562
n= 16 a=9369319		b=6625109		a/b=1.414213562
n= 17 a=22619537		b=15994428		a/b=1.414213562
n= 18 a=54608393		b=38613965		a/b=1.414213562
n= 19 a=131836323		b=93222358		a/b=1.414213562
n= 20 a=318281039		b=225058681		a/b=1.414213562
n= 21 a=768398401		b=543339720		a/b=1.414213562
n= 22 a=1855077841		b=1311738121		a/b=1.414213562
n= 23 a=4478554083		b=3166815962		a/b=1.414213562
n= 24 a=10812186007		b=7645370045		a/b=1.414213562
n= 25 a=26102926097		b=18457556052		a/b=1.414213562
n= 26 a=63018038201		b=44560482149		a/b=1.414213562
n= 27 a=152139002499		b=107578520350	a/b=1.414213562
n= 28 a=367296043199		b=259717522849	a/b=1.414213562
n= 29 a=886731088897		b=627013566048	a/b=1.414213562
2的开方是： 1.4142135623730951
>>> 
```

$$
\begin{aligned}
x &= 1+\frac{1}{1+x} \\
&= 1+\frac{1}{1+\frac{Z}{M}} \\
&= 1+\frac{M}{M+Z} \\
&= \frac{M+Z+M}{M+Z}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= 1 + \frac{2}{1+x} \\
&= 1 + \frac{2}{1+\frac{Z}{M}} \\
&= 1 + \frac{2M}{M+Z} \\
&= \frac{M+Z+2M}{M+Z}
\end{aligned}
$$