RC电路-低通滤波

小圆滚滚

1 电容

上文我们聊了聊电阻与二极管的串并联《电子与数学1-电子中的串并联》，引出了反函数与一些基本数学运算，今天我们闲来无事，来说一说RC这个最基本的动态电路，在正式开始前，我们先聊一聊电容。

1.1 先从电容说起

一说起电容，我就想起之前工作时候，遇到的一个CDE专门研究电解电容的老工程师，给我们讲变频器上直流母线电容池用的铝电解电容，讲了3个小时都没讲完，从等效电路到使用场景，从温升讲到寿命，侃侃而谈，结束后，他跟我们说，有一次去清华自动化系讲，那边的系主任开玩笑说，“X工呀，听你讲之前，我知道电容就是一个符号C，用来储存电荷，结果听你讲了大半天，反而糊涂了，电容到底是啥玩意？？”

其实，我觉得那个清华系主任理解的非常到位，电容就是用来储存电荷的，就好比一个大水池子，我们幻想，里面装的一个个水珠，就是一个个的电荷。

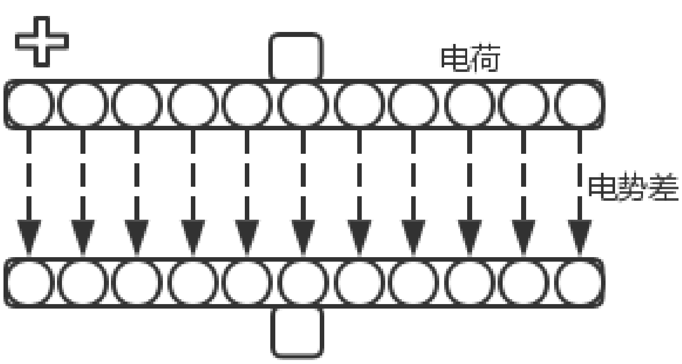


图 1: 电容储存电荷图

我一直觉得用电容类比水池最形象，水管就是导线，水流就是电流，通过水管给水池充水，就如同用导线给电容充电一个道理，如图2所示。

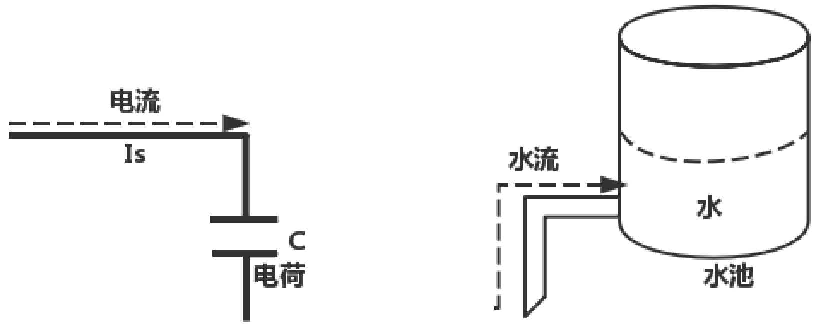


图 2: 电容与水池类比图

我们实际场合里，一般是用水泵给水池供水，同样用电压源给电容充电，这样上面的图就会变成图3的样子。

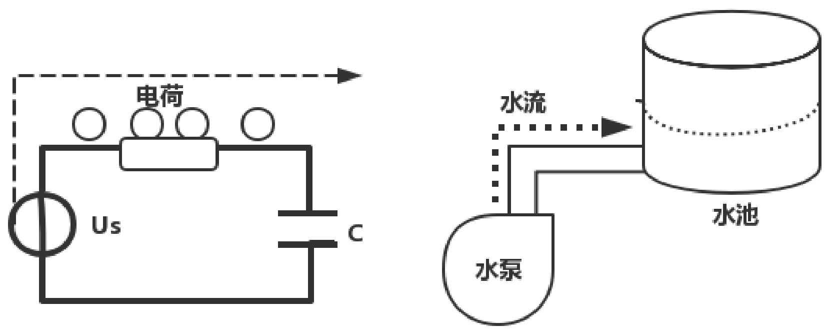


图 3: 电容与水池类比图

水池随着水量的累积，水面到池底会产生水压差，那同样电容随着电荷的累积，两侧极板也会产生电势差。那什么时候这个过程会停止呢？当水池的压差等于泵压，水池充水的水流就停了，同样当电容的电势差等于电源电压，那电容的充电也就结束了。

1 一切都平衡了，这个世界也就安静了，所有的动态反应，都源自某种不平衡。

如果我们把电流记为I，电荷记为Q，那电容充电的过程就是电荷Q对电流I积分的过程,电流I是电容电荷Q的微分：

$Q = \int_0^t I(\tau)d\tau$

$I = dQ/dt$

电流I是因，电荷量Q是果，积分是在求果，微分是在寻因!

随着电容电荷Q的累积，会在电容两端产生电势差U，两者之间存在一个函数关系。

$U = f(Q)$

但要记住，电容毕竟不是一般的水池，随着两个极板电荷累积的越来越多，电容内部的极化越来越严重，好比一个人背得东西越重身体就越扭曲，身体承载能力也会不断减弱，同样随着电荷累积，电

容能承受电压的趋势也在不断下降，如图4所示。跟上一节的电阻一样，我们可以用一根直线去拟合电容的U与Q的这个函数关系，拟合出来直线的斜率倒数就是电容值C。

$C = Q/U$

$I = dQ/dt = CdU/dt$

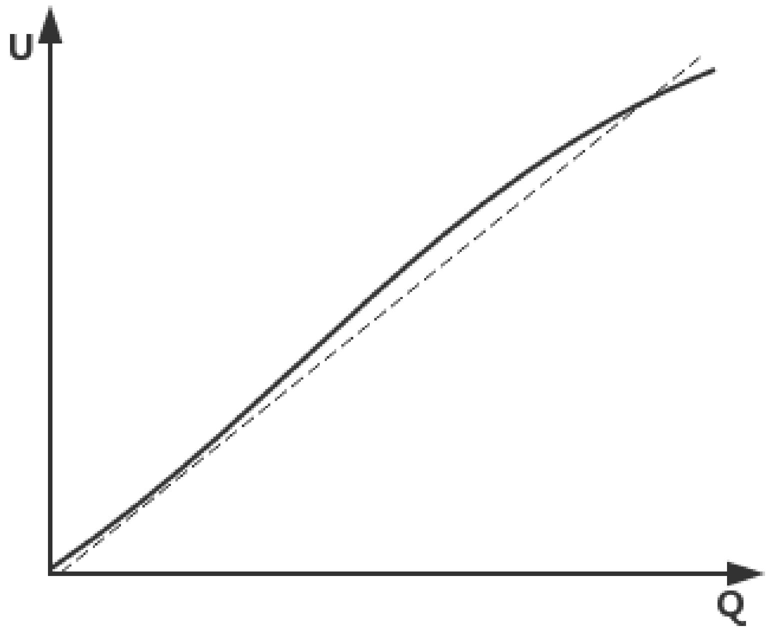


图 4: 电容的电势差与电荷的关系

还有一点，所有的电容都有一个最大耐受电压，也就是这个电势差不能无限增长下去，当电压大到某一刻的时候，你会听到“砰”地一声，青烟一缕，电容此刻命归西天。

1.2 RC的充电过程

我现在还记得，中学物理老师说的一句话，“如果一个**理想电压源**与一个**理想电容**并联，那充电电流会是**无穷大**，充电瞬间完成。”其实吧，我一直觉得无穷这个词是人的幻想，现实世界，怎么会有无穷大这玩意呢?！哪有什么理想电压源，也没有什么理想电容，因为我们活在现实世界，电源有内阻，导线有电阻，电容内部也有ESR（等效串联电阻），所以物理老师那句话只是帮助我们简化理解概念，而实际根本不存在。

如果考虑实际回路电阻的话，那电容充电的真实等效电路如图5所示，将整个线路所有电阻等效为一个电阻R，这就是经典的RC充电电路。

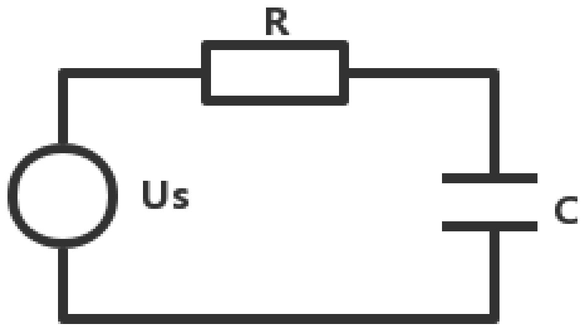


图 5: 电容充电等效电路

这个电路，当我们把电源U_S接上的那一刻，电容电压U_C会怎样变化呢？？？

在实际测试之前，可以先开动大脑想一想。如果电阻为0的话，这不正是物理老师说的嘛，理想电压源与理想电容并联，充电电流无穷大，电容会瞬间充满电压。而随着电阻的加入，回路阻碍变大，整体充电电流会下降，充电速度变慢，电压上升的速度也会下降，而且电阻越大，这个充电速度会越慢。

如果电阻确定，那整个动态充电过程中，电压的变化趋势会是怎样呢？会不会按照一个固定的上升斜率充电到电源电压，不对不对，这不太可能，因为随着电容电压上升，电阻上的压降越来越小，也就意味着充电电流越来越小，所以整个充电过程中，充电的速度是越来越慢，电压上升的趋势也是一样，越来越慢。

于是我们可以脑补一张电容充电过程，如图6所示。

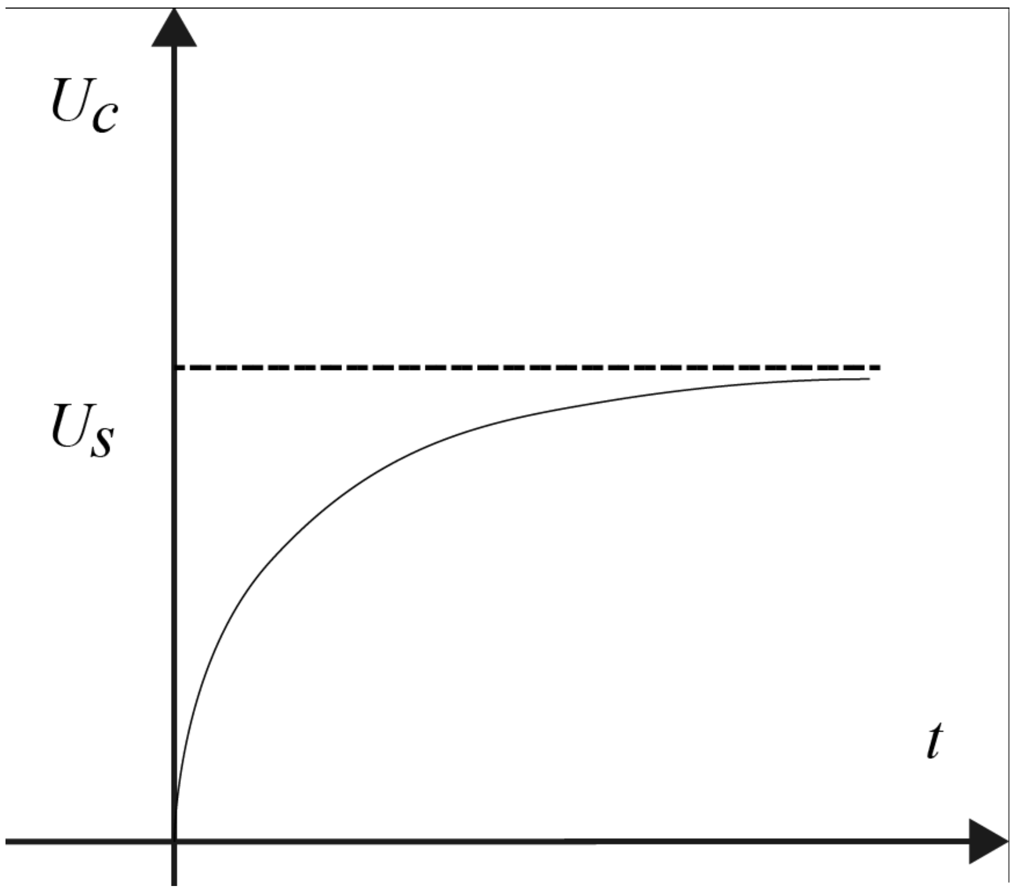


图 6: 脑补电容充电图

脑补结束，我们下面，开始真机实际测试啦。

设定：$Us = 1V$，$R = 1k\Omega$，$C = 1\mu F$ ，电容电压Uc初始值为0，整个Uc电压的动态变化过程如图7所示。

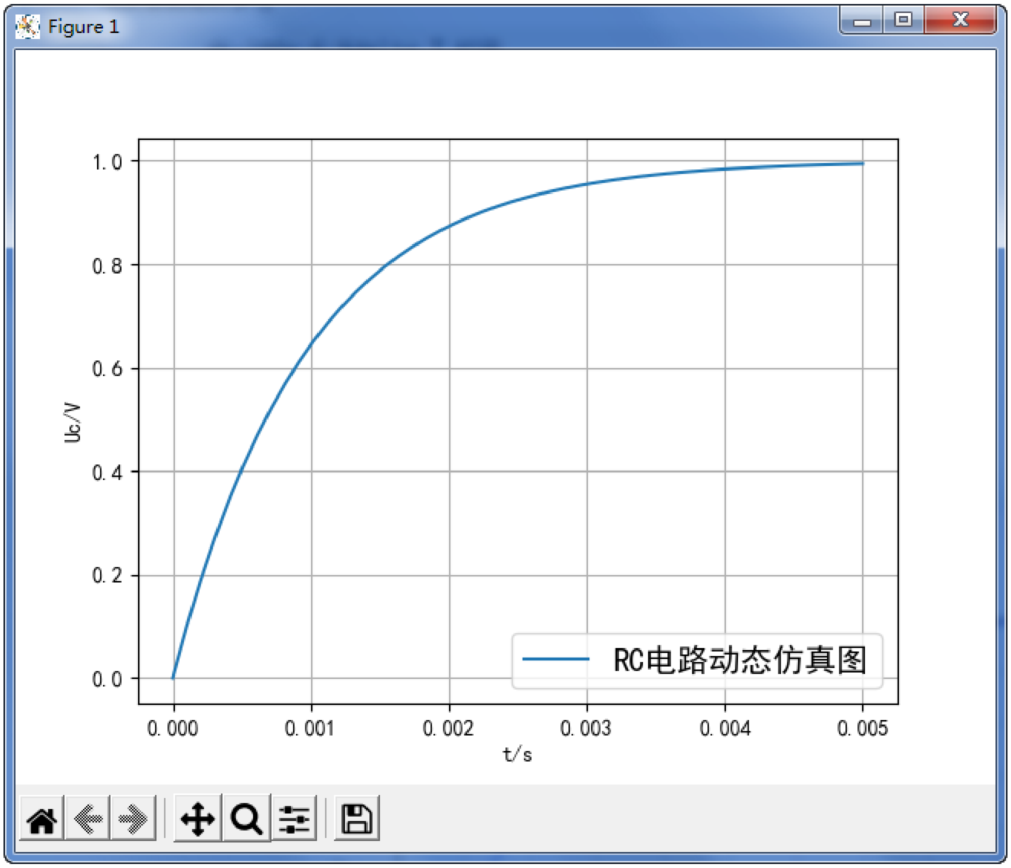


图 7: 实际测试RC充电

哈哈哈，有没有发现，实际测试的图跟我们刚刚脑补的小图形，有点形似呀。

再仔细观察一下，这个图跟我们中学学的什么函数比较像吗，肯定不是一次函数，也不像二次函数，因为最后无穷趋近于一个值，噢，想起来啦，是不是指数函数呀，对，就是这个，变化的越来越慢，指数函数不就是变化率越来越XX嘛，然后我们就拟合出这样一个式子：

$Uc(t) = 1 - e^{-t/0.001}$

下面我们对照着拟合公式来仔细观察一下这个波形，如图8所示，0.001对应指数衰减时间常数，也就是每隔1ms指数部分衰减为上1ms的$1/e \approx 0.35$.

$0ms \quad 1ms \quad 2ms \quad 3ms$

$1 - e^0 = 0 \quad 1 - 0.35 = 0.65 \quad 1 - 0.35^2 = 0.87 \quad 1 - 0.35^3 = 0.957$

```
大多数电子工程师记住这几个典型的数值
```

比如RC电路1倍时间常数到达稳态值65%。

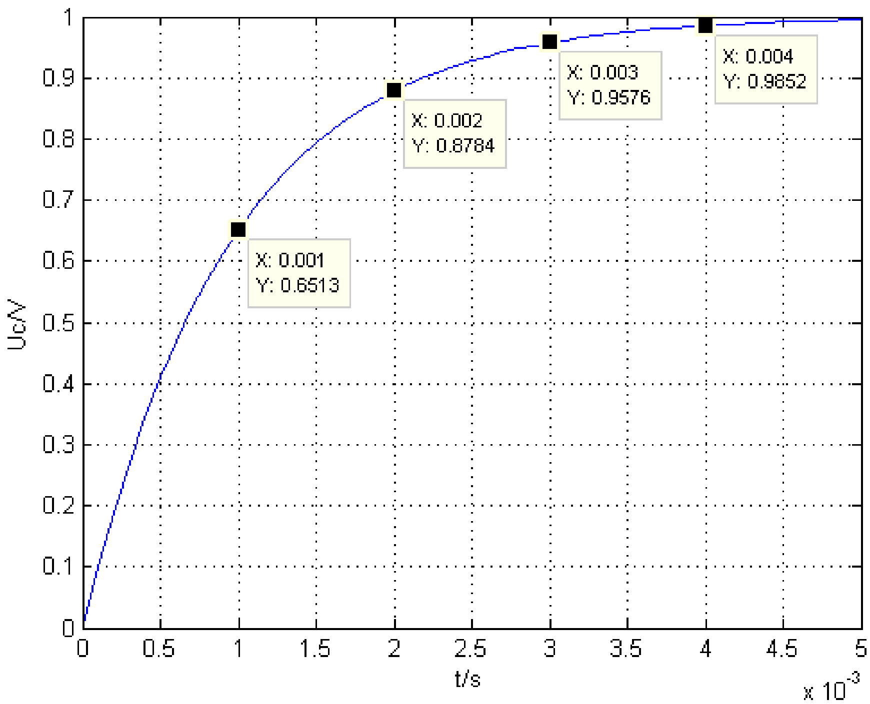


图 8: 实际测试RC充电图形分析

1.3 RC的微分方程

如果用数学方程去表达刚刚描述的RC充电这个动态过程，该怎么做呢？？首先根据基尔霍夫定理得到电源电压等于电阻上的电压加上电容电压，然后电阻上的电流等于电容的电流，电容上的电流等于电容电压的变化率与电容之积，将这几句话用数学表达一下就是下面的数学公式。

$U_s = IR + U_c$——基尔霍夫电压定理

$I = C\frac{dU_c}{dt}$——电容UI特性

解释：电容储存的电荷量Q与电压U和自身属性(也就是电容值C)有关，也就是

$Q = U \times C$

除此之外，还有一个重要公式：

$i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$

du/dt 是指电容电压的变化率，如果电容电压发生突变，会导致无限大的电流。尽管在实际电路中，绝对的电压突变不存在，或多或少都会有时间，因此产生的电流总不会真的无穷大，但是有时候也会存在很大的电流。所以，在实际应用中，对电容的放电尤其重要，例如小电容的时候可以通过螺丝刀等金属短接放电，大电容则需要通过水泥电阻放电。

根据这两个公式，可以得出电容的很多特性，例如：

1. 电容电压不能突变
2. 电容的储能大小
3. 电容的电流与电压的相位关系
4. 还有电容的容抗为什么是 $1/\omega C$

将于是得到：

$$RC\frac{dU_c}{dt}+U_c=U_s \tag{1}$$

有没有发现呀？？？一阶微分方程出来了。关于微分方程的求解，高等数学里专门写了一章去求微分方程的解，总之噼里啪啦一大堆，最后做题的时候，一顿代公式，什么齐次非齐次通解之类的，甚是烦恼，这里有一个说明，就是电路求解与传统的微分方程求解略有不同，可以参考这篇文章：

https://zhuanlan.zhihu.com/p/31383909

1.4 RC的差分方程

RC一阶电路，我们如果想在计算机里仿真？？？该怎么玩呢，这就要用到上一节的微分方程数学模型(1)式了。

导数，还记不记得，我们高等数学里是怎么算的？？？

$\frac{dU_c}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{U_c(t+\Delta t)-U_c(t)}{\Delta t}$

在高等数学里，利用极限逼近的方式来算出导数，当我们用计算机仿真的时候，是逆向把导数离散化，这样我们就可以把第一个式子离散化为下式

$RC\frac{U_c(t+\Delta t)-U_c(t)}{\Delta t}+U_c(t)=U_s(t)$

$U_c(t+\Delta t)=U_c(t)+(U_s(t)-U_c(t))\frac{\Delta t}{RC}$

看到上面的式子了不，我们知道t时刻Uc和Us的值，就可以计算$t+\Delta t$时候的Uc值，然后可以不断迭代这个模型，推演计算后面的数值，这就是仿真的奇妙之处。

如果我们把Δt选为固定的时间段，那就可以简化为

$U_c(k+1)=U_c(k)+(U_s(k)-U_c(k))\frac{\Delta t}{RC}$

看到没，这就是RC电路的差分模型，控制和数字信号处理中大量用到这个。

根据上面的差分方程，我们就可以用matlab写代码，仿真RC电路的动态过程，如图7所示。

整个计算机仿真动态系统都是基于差分方程来做的，用当前的状态和输入去推演下一时刻的状态。如果想仿真精确一点，把仿真步长dt减小一点，但是意味着仿真时间会加长，如果想仿真快点，那就将dt设置长一些，同时还有变步长的算法。

1.5 RC的复数模型

现在我们把Us变为正弦信号，看看Uc的反应，就用Simulink仿真一下吧，Us=sin(2*pi* 1000*t)，R=1000欧，C=1uF，如图9所示。

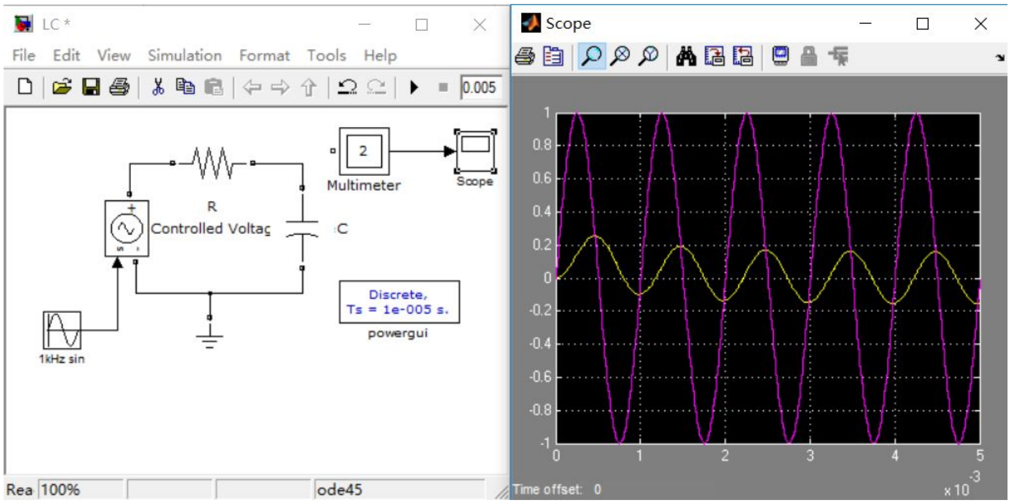


图 9: RC电路对1kHz正弦信号的响应（紫色是Us电压源输入信号，黄色Uc电容的电压响应）

我们仔细观察图9，发现Uc的电压信号频率跟Us一样，幅值下降了好多，相位有一些偏移。我们换一个频率试试，给RC加一个500Hz的电压信号，如图10所示，与1kHz输入信号相比，幅值衰减慢了一些，相位还是有偏移。

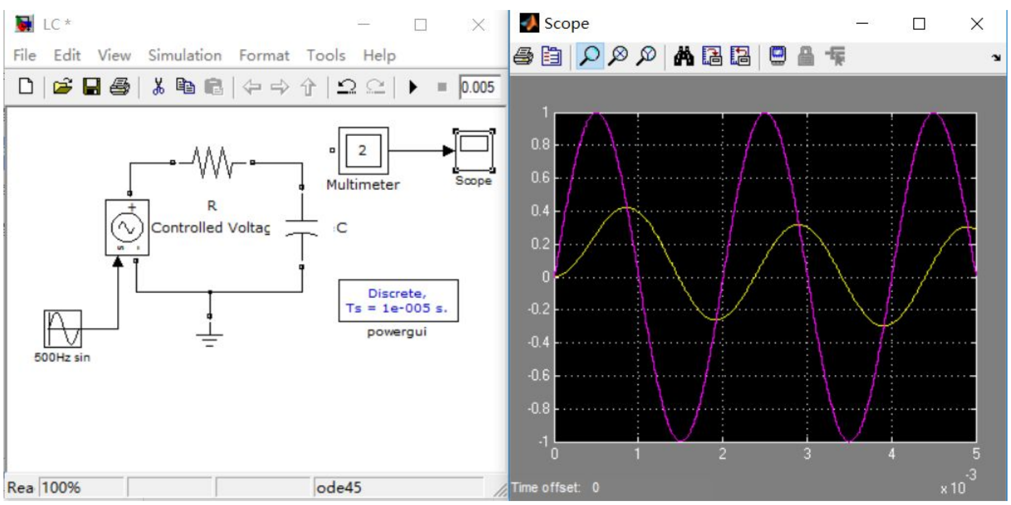


图 10: RC电路对500Hz正弦信号的响应（紫色是Us电压源输入信号，黄色Uc电容的电压响应）

如果想测试这个RC电路对不同频率，不同幅值的正弦信号的响应，还有方波，三角波，锯齿波，好多好多，总不能手动仿真成千上万地测试吧，有没有什么好的测试方法呢，有的同学可能会说微分方程求解，这个还不如仿真呢，仿真就点一下按键，微分方程那可是要徒手求解成千上万次，电子工程师那还不累死呀、、、!

其实不管微分方程，还是差分方程，我们都是在时间轴上玩，加个电压Us，看电容怎么充电，或者在计算机里模拟时域仿真一下这个过程而已，都可以玩的不错，但是输入信号一多还是很麻烦。我们是不是可以换一个空间重新看待这个电路。

几百年前傅里叶老爷子，夜观热环，琢磨出一个好点子：

1 任何周期信号都可以分解为正弦信号的叠加，万法归一。

于是一个系统对于任何周期信号的响应，都可以分解为正弦信号响应的叠加。也就是说，不管你是什么鬼信号，只要是周期的，那我就可以快刀斩乱麻，用几个简单的正弦信号去模拟它，如图12所示。

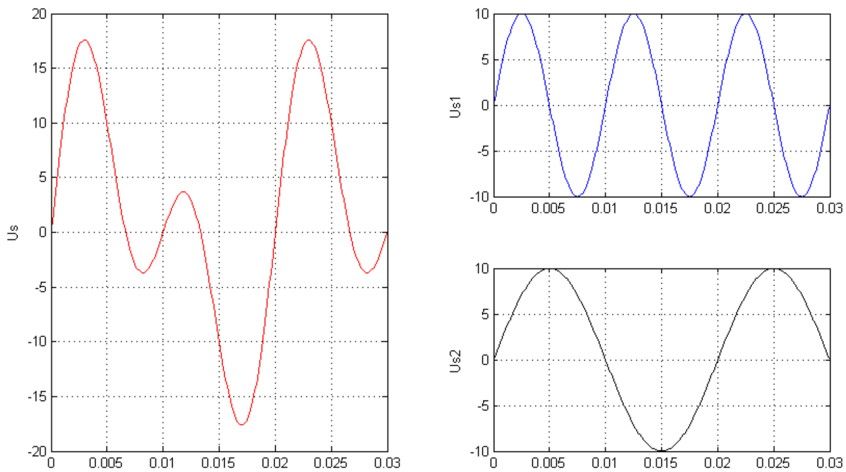


图 11: 复杂周期信号分解为正弦信号叠加（Us=Us1+Us2）

有的同学会问，搞这个有毛用？？？？这里要说一下，你要知道，复杂的周期信号，每一个都不一样，除了凌乱还是凌乱，我们根本没办法找到通用的玩法，但是分解为正弦之后，都是一个模子在刻，只有三个量：频率，幅值和相位。

紧接着傅里叶老爷子，又针对正弦信号的系统响应提出了一套傅里叶变换，把时域的微分方程，变成了频率域的代数方程，于是，于是，我们不用解微分方程了。。。是不是很爽，但是，但是，有两个前提，一个是输入信号（Us信号）是周期信号，另一个是线性（叠加定理）时不变（卷积）系统。

```
工程师就是做直觉性的化简，适当的约束，反而更自由自在!
```

针对一个正弦信号的响应，可以用傅里叶老爷子的方法，快速解决信号响应的问题。只需要在微分方程（初始状态为0）基础上，微分乘以jw，积分除以jw即可，由此可以得到RC电路的复数模型：

$j\omega RCU_c(jw) + U_c(jw) = U_s(jw)$

然后得到RC特性的复数表达

$\frac{U_c(jw)}{U_s(jw)} = \frac{1}{1+jwRC}$

这个复数，幅值就是Uc相对Us衰减比例，相角就是Uc相对Us的相移

我们试一下，Us=sin(2*pi* 1000*t)，R=1000欧，C=1uF，

$\frac{1}{1+jwRC} = \frac{1}{1+j6.28} = 0.1573\angle - 80.9°$

这就意味着，Uc相对Us，幅值衰减为原来的0.1573，相角滞后80.9度，正好与我们图10的仿真结果相同。

这样，我们通过几个基本的算数运算，就可以知道信号衰减多少，相移多少？

到这里，最开始的问题我们就可以全揭开了：

复杂的周期信号-¿分解为简单正弦信号-¿正弦信号响应的叠加-¿复杂周期信号的响应

其实傅里叶老爷子就在说一个道理：

```
复杂的问题搞不定，可以分解为简单的问题，一个个解决完，再综合一下就是复杂问题的答案!
```

如果这个复数模型复杂了，乘除运算起来也挺麻烦，还可以用Bode图去分析，这个玩法更好，它能把算数的乘除变成图形里的加减操作，加减法，总不能也不会吧，哈哈哈！

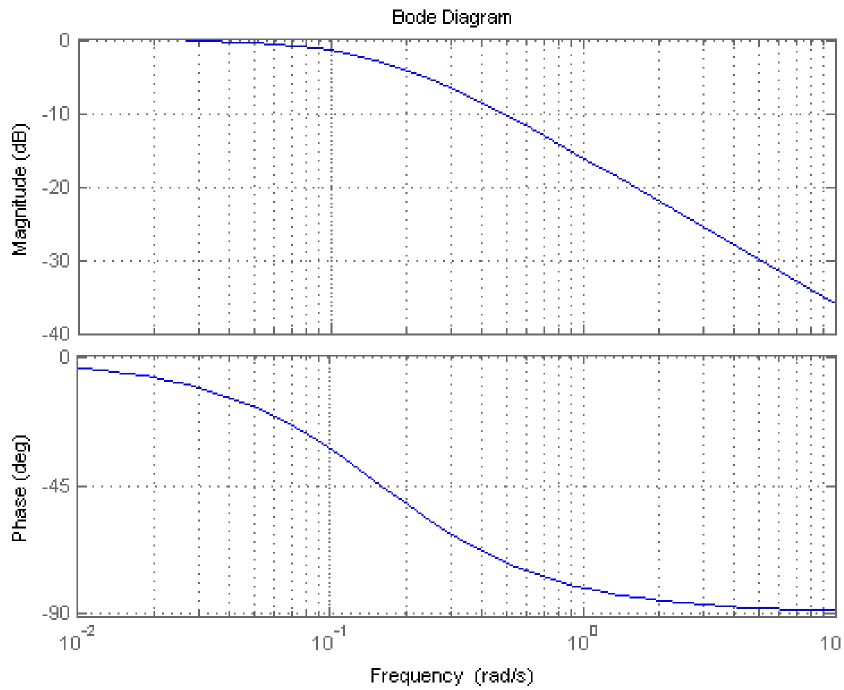


图 12: Bode图

2 低通滤波

低通滤波，从字面意思理解就是低频信号可以通过，高频信号会被滤掉，主要用于去除信号的毛刺和干扰，工程上应用较多。

【原理】利用电容通高频阻低频、电感通低频阻高频的原理。对于需要截止的高频，利用电容吸收电感、阻碍的方法不使它通过；对于需要放行的低频，利用电容高阻、电感低阻的特点让它通过。

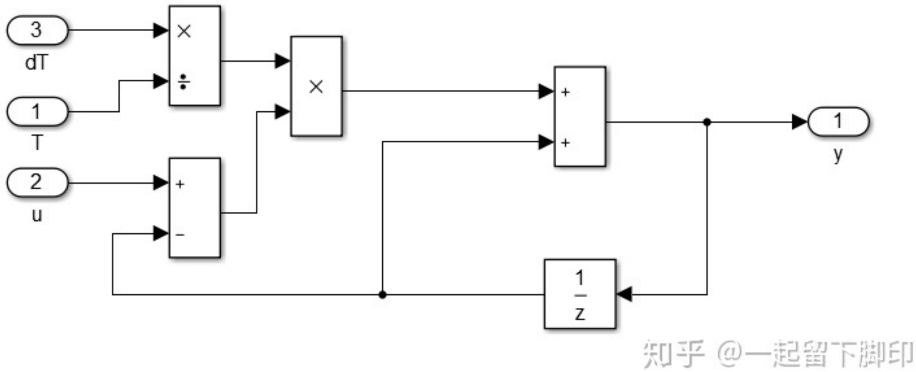
低通滤波器的基本理论公式是：

y(t) = K*u(t) + (1-K)*y(t-1) = y(t-1) + K*[u(t)-y(t-1)]

其中，K=dT/T，K一般介于0 1之间，dT是运行步长，T是时间常数；u是输入信号；y是输出信号。

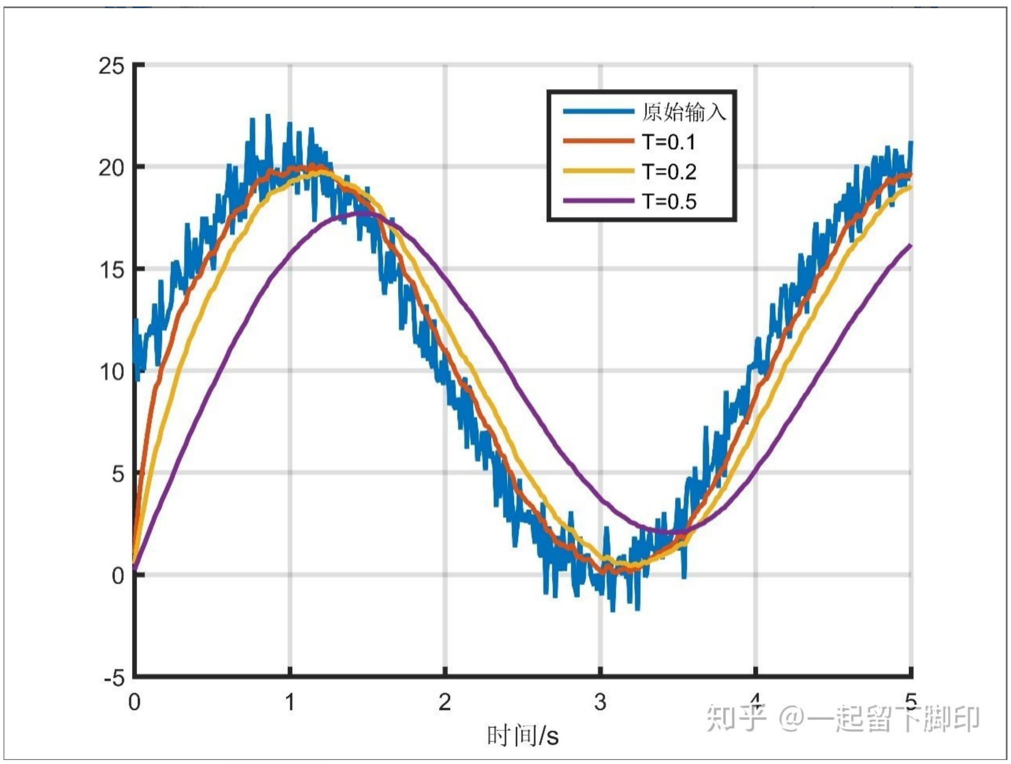
一般对于某一个控制器，其运行周期是一定的，所以只能调整时间常数来改变滤波效果。

基于以上公式我们先搭建一个基本的低通滤波器simulink模型，如下图：



从图中可以看出，滤波器的输出就是上一时刻输出，再加上一个比例因子乘以当前输入减去上一时刻输出。可以试想，如果该比例因子为1（即T=dT），当前时刻输出就等于输入；如果该比例因子处于0 1之间，当前时刻输出肯定要慢于输入，就会产生迟滞，带来的好处就是输入有突然的较大变化时也会被这个比例因子衰减。所以，低通滤波器的优势就是可以滤掉较大高频波动，缺点是相比于原始信号会有延迟。

我们给上面的低通滤波器模型加上输入和设定好不同的时间常数（0.1、0.2、0.5），对比输入信号和滤波之后的信号如下：



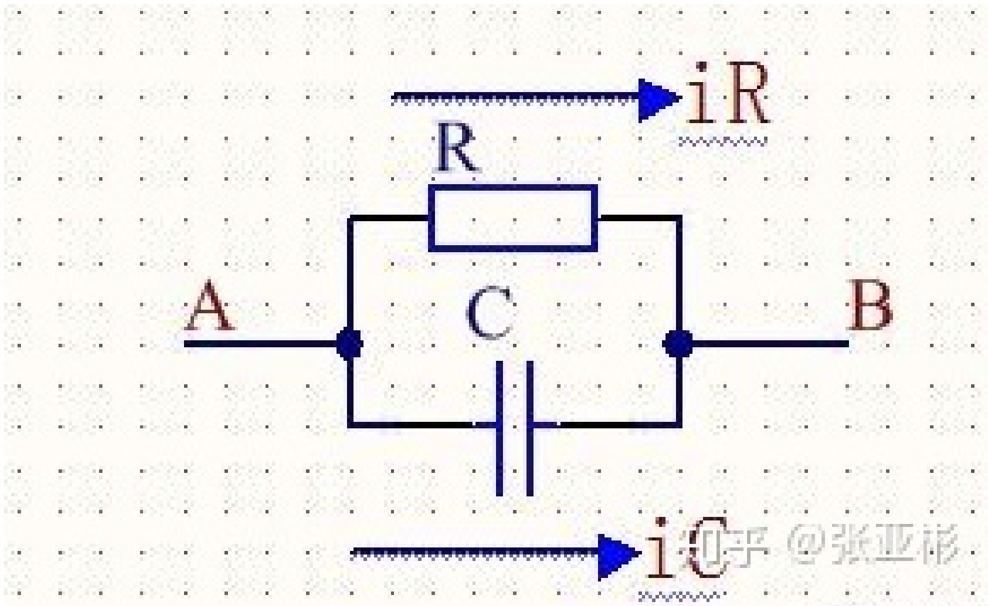
可以看出，滤波之后信号变平滑了，同时随着时间常数T的增大，滤波后的曲线延迟也越大。所以在实际使用时，时间常数T的选择特别重要，需要我们综合考虑控制系统对信号精度和信号延迟的要求，选择符合我们要求的时间常数。

2.1 时间常数

学过电子通信的朋友都知道RC电路和RL电路都存在时间常数，它是反应电路随时间衰减，有一个过渡期的时间常数。其中RC电路时间常数： τ =RC，LR电路时间常数： τ =L/R。那为什么叫时间常数呢，他和时间又有什么关系呢？

首先看RC电路：

当AB两端的直流电源突然断开时，通过AB的电流瞬间中断，但电容两端的电压不会突变（中断前后瞬间不变），所以Uc=UR。此刻存储在C中的能量被释放到电阻R上,由此形成一个串联组合。



根据节点处的电流（KCL）情况得：需要用到点微积分:

$$i_C + i_R = 0 \tag{2}$$

$$C\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_R}{R} = 0 \tag{3}$$

初始条件$U_C(0) = V_0$(只要你区别开了U_R，那么以后可以简称u)，得

$u(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$

就得到了电容电压随时间衰减的关系式，且是按指数形式衰减。

设$\tau = RC$，那么电容电压随时间衰减的速率是：

$\frac{du(t)}{dt} = -V_0 \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

所以t=0时，可到初始电压V0的衰减速率：

$\frac{du(0)}{dt} = -V_0 \frac{1}{\tau}$

初始电压V0衰减到0需要的时间是：

$t = \frac{V_0}{-V_0 \frac{1}{\tau}} = -\tau$

由此得到RC就是初始电压V0以恒定的速率衰减到0所需要的时间。这就是为什么叫做时间常数的原因，公式中负号的意思是电压随时间在衰减。