# 排列组合以及平方、杨辉三角

小圆滚滚

## 1 平方的加法和面积

如图1：

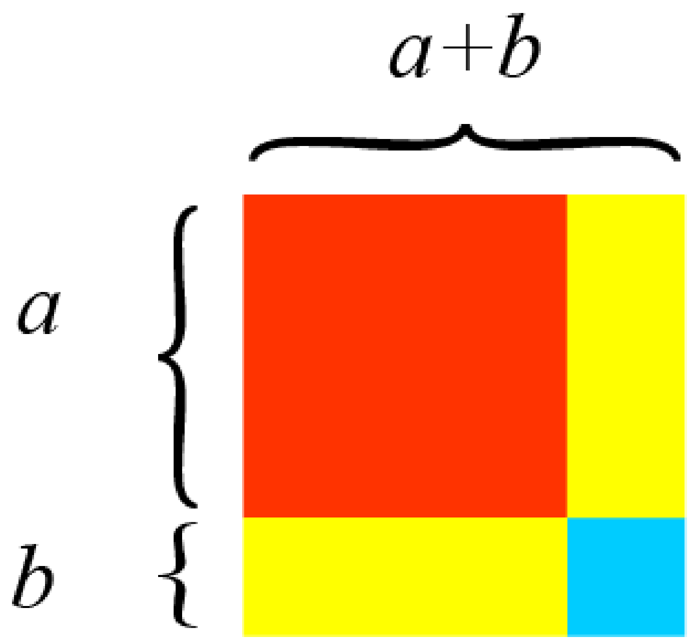


图 1: 平方的加法

$(a+b)^2 = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$
$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$
$\because C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$
$\therefore C_n^m = C_n^{n-m}$
笛卡尔乘积：itertools.product(a,b)　(排列乘积)

```
import itertools
a = (1, 2)
b = ('A', 'B', 'C', 'D')
c = itertools.product(a,b)
for i in c:
```

```
    print(i,end=",")
```

(1, 'A'),(1, 'B'),(1, 'C'),(1, 'D'),(2, 'A'),(2, 'B'),(2, 'C'),(2, 'D')

乘积：itertools.combinations('ABCDEFGH', 2)　(组合乘积)

```
import itertools
countNum = 0
for i in itertools.combinations('ABCDEFGH', 2):
    print(''.join(i),end=" ")
    countNum += 1
print('\n')
print("countNum=:", countNum)
```

AB AC AD AE AF AG AH BC BD BE BF BG BH CD CE CF CG CH DE DF DG DH EF EG EH FG FH GH

countNum=: 28

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b)(a+b) \\
&= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= a\cdot a\cdot a + a\cdot b\cdot a + b\cdot a\cdot a + b\cdot b\cdot a \\
&+ a\cdot a\cdot b + a\cdot b\cdot b + b\cdot a\cdot b + b\cdot b\cdot b \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
\end{aligned}
$$

## 2　二次方程的简单观察

$ax^2+2bx+c=0$有两个相等的根的充分必要条件是$b^2-ac=0$

令$y=\frac{px+q}{rx+s}$

可知$x=\frac{q-sy}{ry-p}$

代入替换变量，则关于x的方程变成了另一个关于y的方程：

设新方程是$Ay^2+2By+C=0$，通过代数运算，我们发现新方程的系数A，B，C能用原方程的系数a，b，c表示如下：

$$
\begin{aligned}
&A = as^2-2bsr+cr^2 \\
&B = -aqs+b(qr+sp)-cpr \quad \text{这里的系数提给了2B} \\
&C = aq^2-2bpq+cp^2
\end{aligned}
$$

同样利用判别式很容易得出

$B^2-AC=(ps-qr)^2(b^2-ac)$

这里，$b^2-ac$称为关于x的二次方程的判别式，因此关于y的二次方程的判别式是$B^2-AC$。这样我们就证明了，变换方程的判别式等于原始方程的判别式乘以因子$(ps-qr)^2$，这个因子只依赖于把x用y表示的变换式$y=\frac{px+q}{rx+s}$中的系数p，q，r，s。

# 3 矩阵及其代数

凯莱的最后一个伟大发明，是矩阵及其代数。这个题目开始于他在1858年的一篇论文，直接产生于对代数不变量理论的那些（线性）变换的结合方式的简单观察。

变换: $y \rightarrow \frac{px+q}{rx+s}$

再加一层变换： $x \rightarrow \frac{Pz+Q}{Rz+S}$

把其中的第二个变换应用到第一个变换中的x上。我们得到 $y \rightarrow \frac{(pP+qR)z+(pQ+qS)}{(rP+sR)z+(rQ+sS)}$

我们只注意三个变换中的系数，把它们写成方阵，即

$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pP+qR & pQ+qS \\ rP+sR & rQ+sS \end{bmatrix}$

在凯莱创立了它67年之后，海森伯在1925年发现，矩阵代数恰恰是他在其量子力学的革命性工作中所需要的工具。