度规张量2

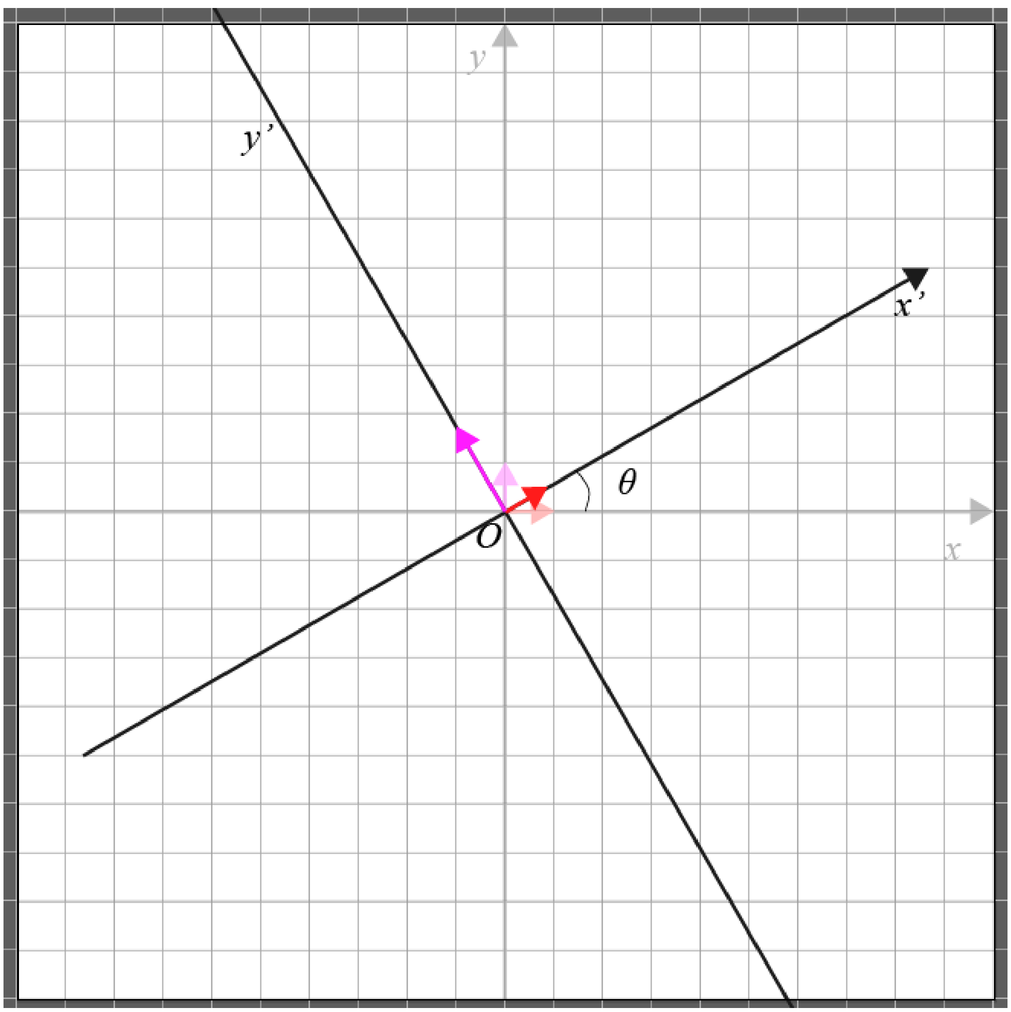
小圆滚滚

1 空间中任意一点P的坐标变换

1.1 基底变换和坐标变换

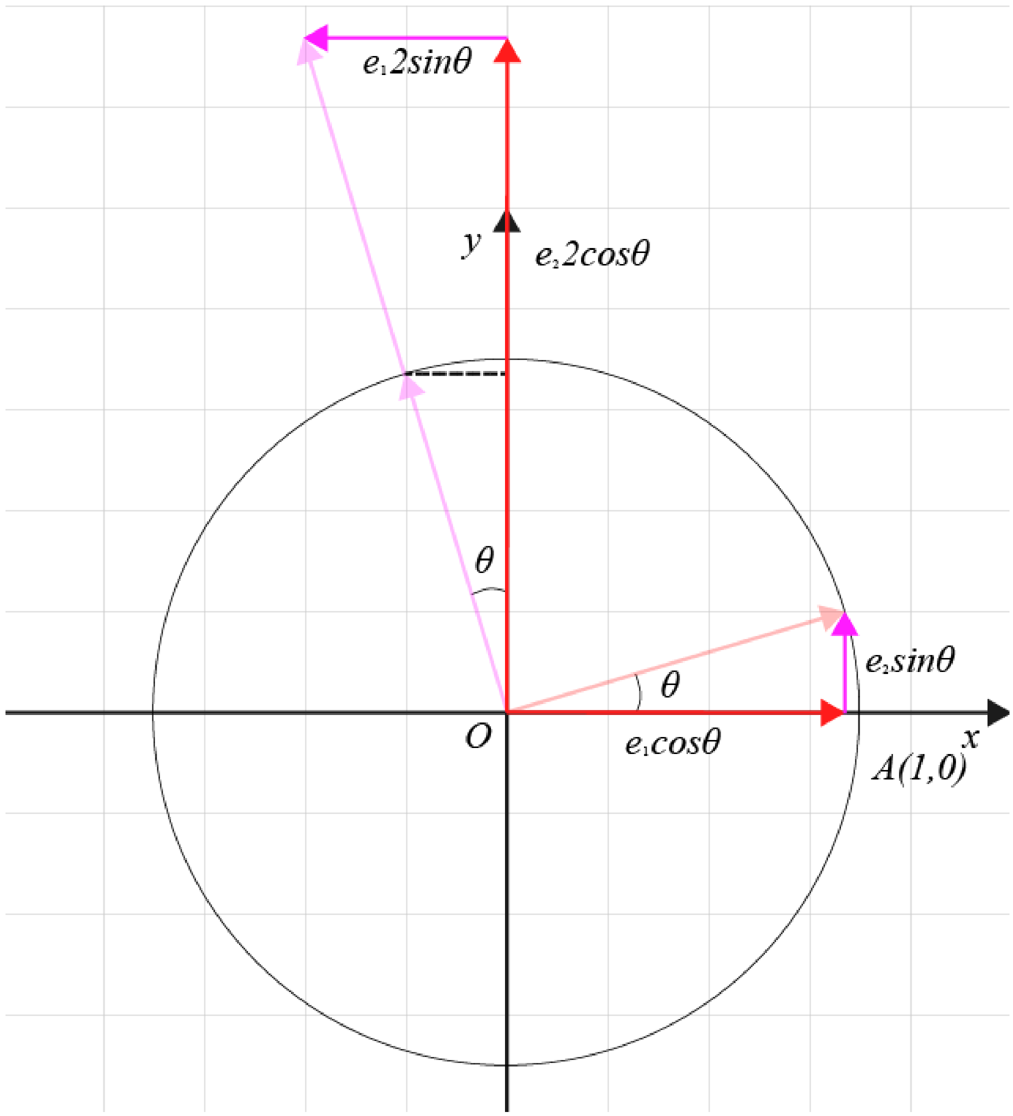
坐标变换涉及到新、旧两个坐标系。

变换过程中有两个变换矩阵，一是将旧基变换为新基的过渡矩阵 P（右乘）,另一个是将矢量在旧基下的坐标变换至新基下的坐标的变换矩阵T（左乘）。



上图中，空间中某点O的新坐标系 $x'Oy$"和旧坐标系 xOy 之间相差一个角度 θ 。基矢量 $\mathbf{e}_1$ 是沿 Ox 方向的单位矢量，基矢量 $\mathbf{e}_2$ 是沿 Oy 方向的单位矢量；基矢量 $\mathbf{e}_1\prime$ 是沿 Ox' 方向的单位矢量，基矢量 $\mathbf{e}_2\prime$ 是沿 Oy' 方向的2倍的单位矢量。操作过程就是先纵向伸缩200%，然后左旋30°.

首先计算将旧基变换为新基的变换矩阵。
根据几何关系 $\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}'$ 在旧基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 下的坐标为：
$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 cos(\theta) \\ \mathbf{e}_1 sin(\theta)\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-2\mathbf{e}_2 sin(\theta) \\ 2\mathbf{e}_2 cos(\theta)\end{bmatrix}$$



即
$$\begin{cases}\mathbf{e}_1{}' = \mathbf{e}_1 cos(\theta) + \mathbf{e}_2 sin(\theta) \\ \mathbf{e}_2{}' = -2\mathbf{e}_1 sin(\theta) + 2\mathbf{e}_2 cos(\theta)\end{cases}$$
注意：1.这里的加减不是代数（标量）加减，这里的加减是向量的加减。
2.P是一个转置的矩阵。这个坑，和伴随矩阵的坑是一样一样一样的。
因为纯旋转时，单位圆半径长度不变。方向采用$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$，数值采用单位向量。所以$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2|$.
$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\theta) & -2sin(\theta) \\ sin(\theta) & 2cos(\theta)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}$$

或者写成： $\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix} P$

其中，P就是将旧基变换为新基的变换矩阵。

注意对于“坐标变换公式”，过渡矩阵是右乘原基向量横向排开的矩阵的。因为有些人不注重左乘和右乘。假设三个视角分别为A、B、C，分别代表着两坐标轴同时左旋一定角度（A）、不变（B）、两坐标轴同时右旋一定角度（C）。那么如果从C的视角作为起点，C左旋得到B（我们的正常视角），那么C上的向量将经历一个在B上看左乘变换的矩阵T_1，我们称之为第一步变换。而再由B到A，那么将经历一个在B上看左乘变换的矩阵T_2.那么由C到A左乘变换的复合矩阵就是$T_{basis} = T_2 T_1^{-1}$.而我们经常性的把一个对矩阵的变换写成右乘，为什么？因为如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_1, \\ \cdots \\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_1, \end{cases}$$

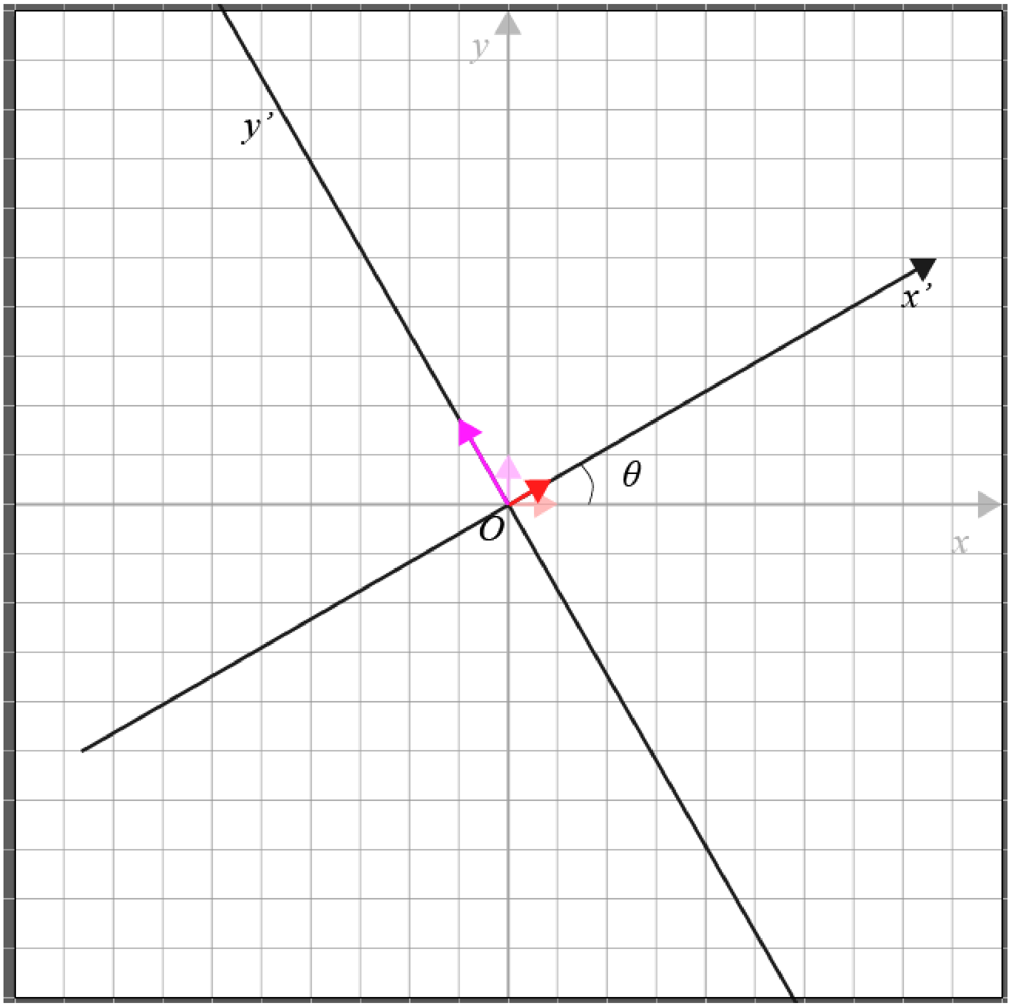
基变换公式：

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}$$

上面是变换矩阵为什么转置，又为什么是右乘。因为对于向量的方程，它的变换叫做基变换。它的变换矩阵要写在右面，称之为过渡矩阵。T_1为我们的视角到开始的那个基的变换，T_2为我们的视角到最终的那个基的变换。参考(8)则

$$P = T_1^{-1} T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(\theta) & -2sin(\theta) \\ sin(\theta) & 2cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -1 \\ 0.5 & 1.732 \end{bmatrix}$$

线性变换，可以将张成线性空间的矢量，分解成二维下张成面、三维下张成体的多个向量。那么这些有能力张成的向量，就能描述它张成的空间中的所有的变化。



这里有个坑(先左旋再拉伸，不等于先拉伸再左旋)：

先拉伸，再旋转 $\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -2sin(\theta) \\ sin(\theta) & 2cos(\theta) \end{bmatrix}$

先旋转，再拉伸 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 2sin(\theta) & 2cos(\theta) \end{bmatrix}$

对于标量的线性变换：

根据方程组：$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_1 \end{cases}$

可以转化成矩阵形式： $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\mathbf{x}$，这里不一样的是，此方程组里没有向量、只有标量。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}x_2 = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

下式（1）有两种解释，任何变换矩阵左乘坐标，T= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，都能获得新的坐标。我称之为变换左乘坐标。同理，如果输入换成老基底，那么输出就是新基底。新基底等于变换矩阵乘以老基底。

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

另一种解释，是变换矩阵T是新基底。我称之为坐标的分量（标量）右乘基底。新坐标等于新基底

乘以老坐标。

（1）式标量版变换：

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{\text{第一种解释}}=\underbrace{\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}y}_{\text{第二种解释}}=\begin{bmatrix}ax+by\\cx+dy\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\text{又是点积}} \tag{1}$$

其中，将 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 看作是输入的一个矢量，变量的横坐标$\vec{i}$（a, c）和纵坐标和$\vec{j}$（b, d）分别为新基底的横基底和纵基底在我们视角下的坐标读数。那么产生的矩阵乘积就是矢量在新的坐标系下的坐标读数。

T就是将旧基变换为新基的变换矩阵

$T \xlongequal{def} \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

（2）式矢量版变换：

$$T\begin{bmatrix}\hat{i}&\hat{j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_x&j_x\\i_y&j_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\hat{i}&T\hat{j}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ai_x+bi_y&aj_x+bj_y\\ci_x+di_y&cj_x+dj_y\end{bmatrix} \tag{2}$$

则有：

$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}'&\mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix}=\mathbf{T}_{basis}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\end{bmatrix}\mathbf{P}$

为什么基变换是右乘而向量变换是左乘？参考（8）式。

这样书写相当于：

$T_{basis}\vec{e_1}=T_{basis}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$和 $T_{basis}\vec{e_2}=T_{basis}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

在这里我们一口气算出来： $\begin{bmatrix}0.866&-1\\0.5&1.732\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.866&-1\\0.5&1.732\end{bmatrix}$

再计算将矢量在旧基下的坐标变换至新基下坐标的变换矩阵。对任意矢量 **A** ，其在旧基下存在一组坐标 $\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ ，其在新基下同样存在一组坐标 $\begin{bmatrix}A'_1\\A'_2\end{bmatrix}$，满足

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}'&\mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A'_1\\A'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.866&-1\\0.5&1.732\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A'_1\\A'_2\end{bmatrix}$

则

$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}'&\mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A'_1\\A'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$

可得

$$\begin{bmatrix}A'_1\\A'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}'&\mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=(\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\end{bmatrix}P)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1&\mathbf{e}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix} \tag{3}$$

根据逆矩阵的求逆法则：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，上式可得：

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

特殊的，起始基为单位矩阵（我们的视角）时，上式等于：

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

利用逆矩阵公式：

若：$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，当$|A| \neq 0$时，有

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

$>>>importmath$

$>>>math.sqrt(3)$

1.7320508075688772

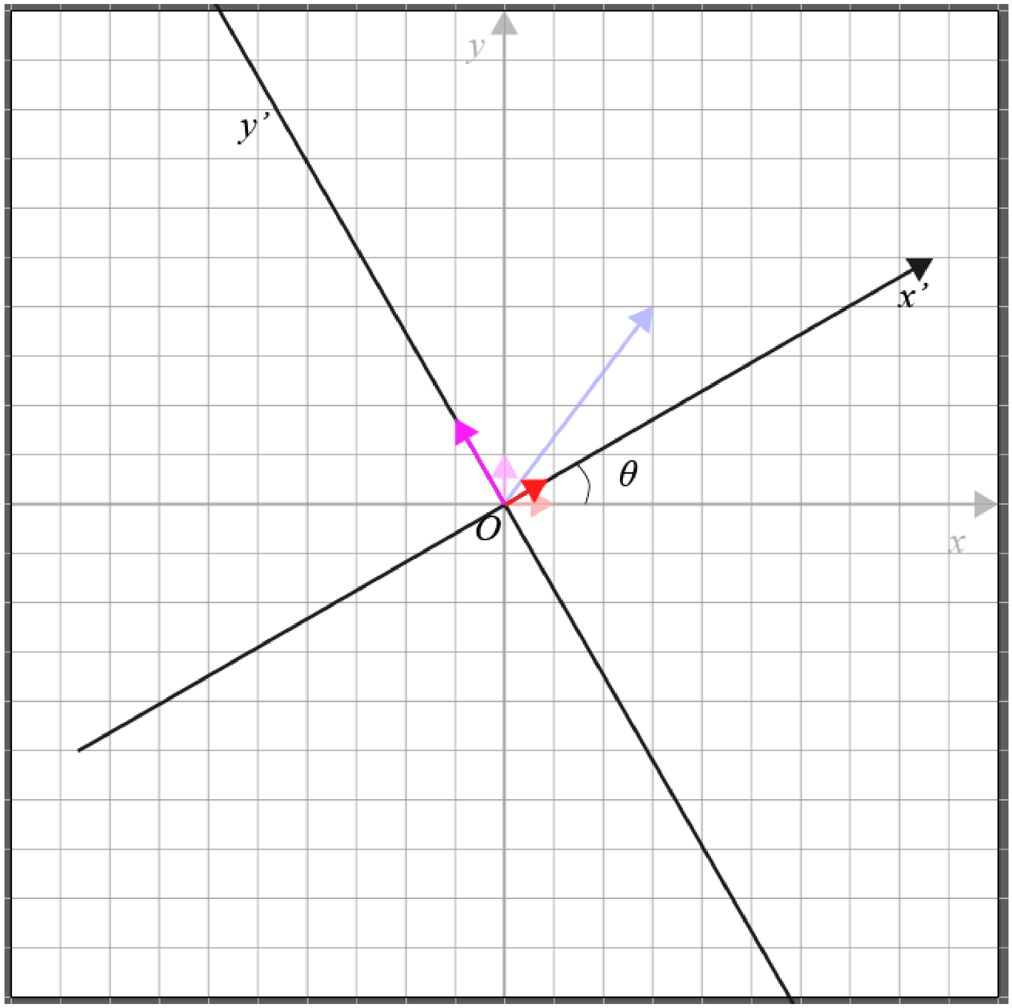
$>>>round((1.7320508075688772**2/2+0.5),2)$

$ad - bc = 2.0$

$P^{-1} = (T_1^{-1}T_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.25 & 0.433 \end{bmatrix}$

可得：

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 \\ -0.25 & 0.433 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.598 \\ 0.982 \end{bmatrix}$$



总结一下

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \mathbf{P} \\ \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

我们以基矢量变换矩阵 $\mathbf{P}$ 作为参考，发现矢量 $\mathbf{A}$ 的坐标变换矩阵为 $\mathbf{P}^{-1}$ ，即 $\mathbf{P}$ 的逆。这时我们就说，矢量 $\mathbf{A}$ 在 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 及 $\{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}'\}$ 下的分量 $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ 及 $\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix}$ 为矢量 $\mathbf{A}$ 的**逆变分量（contravariant components）**。同时，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}'\}$称为**协变基底（covariant basis）**。

为了更好地从符号上区分协变、逆变量，约定用下标序号表示协变量，用上标序号表示逆变量。则

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -1 \\ 0.5 & 1.732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.598 \\ 0.982 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.999 \\ 3.999 \end{bmatrix}$$

1.2 对偶/倒数基底(dual/reciprocal basis vectors）及协变、逆变概念

对空间中任意点 P 的一组基$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$，我们希望在 P 点找到另一组基$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$，使得

$$\begin{cases} \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}^j = 0, i \neq j \\ \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}^j = 1, i = j \end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {e^1}_x & {e^2}_x & {e^3}_x \\ {e^1}_y & {e^2}_y & {e^3}_y \\ {e^1}_z & {e^2}_z & {e^3}_z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e_{1x}{e^1}_x + e_{1y}{e^1}_y + e_{1z}{e^1}_z & 0 & 0 \\ 0 & e_{2x}{e^2}_x + e_{2y}{e^2}_y + e_{2z}{e^2}_z & 0 \\ 0 & 0 & e_{3x}{e^3}_x + e_{3y}{e^3}_y + e_{3z}{e^3}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意看上式的上下标对应的索引号，他们构成了矩阵的行列坐标。内涵是点积的意义：

两个前提条件，保证对偶的两个基分量是点积：

1.两组基中，有一组转置。

2.只有i=j,$cos\varphi = 1 \quad \varphi = 0°$

点积就是用来按基的某一个基底向量来找该向量方向的分量的。逆变基底的对偶基底就是协变基底。这两个是一一对应的关系（在斜角坐标系下，尤为明显）。并且逆变基底的另一个基底是垂直于该协变基底的。这样才有克罗内克符号在夹角为90度时点积为0，才能够在点积最后的相加中去掉其他分量，唯一剩下一个分量。

那么$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$是不是一定存在呢，答案是肯定的。

因为$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$线性无关，所以 $\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{bmatrix}$ 可逆，

即必然存在$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$，

且

$$\begin{bmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3\end{bmatrix} = (\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{bmatrix}^T)^{-1} \tag{4}$$

.

我们称$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$就是$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$的**对偶基底/倒数基底**。

在斜角坐标系里，如果协变基底夹角是锐角，那么逆变基底夹角就是钝角。所以协变基底才和描述的向量以相同的方式变化（这叫协变），逆变基底和描述的向量以相反的方式变化。

现在 P 点新设一组基$\{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}', \mathbf{e}_3'\}$，当然也就存在新基的对偶基底$\{\mathbf{e}^{1\prime}, \mathbf{e}^{2\prime}, \mathbf{e}^{3\prime}\}$，满足

$\begin{bmatrix}\mathbf{e}^{1\prime} & \mathbf{e}^{2\prime} & \mathbf{e}^{3\prime}\end{bmatrix} = (\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' & \mathbf{e}_3{}'\end{bmatrix}^T)^{-1}$

根据第一部分论述 $\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' & \mathbf{e}_3{}'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\end{bmatrix}\mathbf{P}$，

这里旧基右乘一个过渡矩阵就转换到了新基的视角。

总结：

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} ab = c \\ b = \dfrac{c}{a} = a^{-1} \cdot c \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{r} TA = B \\ (T^{-1}T)A = T^{-1}B \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow A = T^{-1}B$$

当一个左乘的变换矩阵T。用它的逆矩阵去右乘刚得到的新矩阵，那么相当于将新的矩阵，逆向回了原来的样子。像这种等式的左项系数挪到等式的另一边，就变成了分母的行为，称之为逆（指数函数的负号、倒数）。

注意这里矩阵不具乘法备交换律。等式左右两边移动的矩阵，一定是逆在左乘。这种左乘逆矩阵的变换。也让我们知道了如何站在他人的角度，用他人的变换得到我们的世界的视角的变换。

这里总结一下左乘和右乘：

左乘的变换，一定都是我们视角下的旋转和拉伸和剪贴。而右乘只有两种情况，一种是新基底下的新坐标右乘一个变换（我们视角下如何将老坐标转换成新坐标的变换）的逆变换。会得到老坐标。另一种情况就是基底右乘一个变换（这里没有逆）变成了新基底。

所以两个基之间的转化，一般写成基右乘过渡矩阵。对于一个矢量（或者说坐标）的转化，一般写成左乘变换矩阵。

可见，从旧对偶基底到新对偶基底变换过程中，其中出现了矩阵取逆操作，

$\begin{bmatrix}\mathbf{e}^{1\prime} & \mathbf{e}^{2\prime} & \mathbf{e}^{3\prime}\end{bmatrix} = ((\begin{bmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3\end{bmatrix} P)^T)^{-1}$

于是我们称对偶基底$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$，$\{\mathbf{e}^{1\prime}, \mathbf{e}^{2\prime}, \mathbf{e}^{3\prime}\}$为**逆变基底（contravariant basis）**。

同时，在对偶基底$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$，$\{\mathbf{e}^{1\prime}, \mathbf{e}^{2\prime}, \mathbf{e}^{3\prime}\}$下，矢量 $\mathbf{A}$ 的分量满足

$\begin{bmatrix}A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3\end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix}A_1 \\ A_2 \\ A_3\end{bmatrix}$

此时变换矩阵为 $\mathbf{T}^T$ ，无取逆操作，于是我们将矢量 $\mathbf{A}$ 在基底$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$，$\{\mathbf{e}^{1\prime}, \mathbf{e}^{2\prime}, \mathbf{e}^{3\prime}\}$下的分量 $\begin{bmatrix}A_1 \\ A_2 \\ A_3\end{bmatrix}$， $\begin{bmatrix}A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3\end{bmatrix}$ 称为矢量 $\mathbf{A}$ 的**协变分量（covariant components）**。

总结一下，矢量没有所谓逆变、协变之分，其分量才有逆变、协变之分。

矢量在协变基底$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$下的分量为逆变分量，

在逆变基底$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$（协变基底的对偶基底）下的分量为协变分量。协变、逆变的概念是在变换矩阵 $\mathbf{T}_{basis}$（将旧基变$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$换为新基$\{\mathbf{e}_1{}', \mathbf{e}_2{}', \mathbf{e}_3{}'\}$的变换矩阵）的基础上建立的。

刚才那个图的逆变基底计算是：

$\begin{bmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2\end{bmatrix} = (\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}^T)^{-1} = (\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}^T)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\mathbf{e}^{1\prime} & \mathbf{e}^{2\prime}\end{bmatrix} = (\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix}^T)^{-1} = (\begin{bmatrix}0.866 & -1 \\ 0.5 & 1.732\end{bmatrix}^T)^{-1} = \begin{bmatrix}0.866 & -0.25 \\ 0.5 & 0.433\end{bmatrix} = P_2$

这里P_2^{-1}等于协变基底的转置，所以协变分量计算是：

$\begin{bmatrix}A'_1 \\ A'_2\end{bmatrix} = P_2^{-1} \begin{bmatrix}A_1 \\ A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.866 & 0.5 \\ -1 & 1.732\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3 \\ 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4.598 \\ 3.928\end{bmatrix}$

则有：

$\begin{bmatrix}\mathbf{e}^{1\prime} & \mathbf{e}^{2\prime}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}A'_1 \\ A'_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.999868 \\ 3.999824\end{bmatrix}$

2 整个空间的坐标变换

现在上点难度。

对于一般的坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

我们简记为

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$

则对于任意点P的旧基$\mathbf{X}$、新基$\mathbf{U}$ ，有

$\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}$

记变换矩阵 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}$为讨论“协变”、“逆变”概念的基准。

对于微分位移矢量$d\mathbf{x}$ 和 $d\mathbf{u}$，有

$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}})^{-1} d\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} d\mathbf{x}$

显然，微分位移矢量的变换遵循“逆变”规则。

对于梯度矢量 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ ，有

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{T}$

显然，梯度矢量的变换遵循“协变”规则。

对于微分位移矢量的模长的平方 $d^2 s$,有

$d^2 s = (d\mathbf{x})^T \mathbf{G}_\mathbf{X} d\mathbf{x} = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u})^T \mathbf{G}_\mathbf{X} (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u})$

$= (d\mathbf{u})^T (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}})^T \mathbf{G}_\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} = (d\mathbf{u})^T (\mathbf{T})^T \mathbf{G}_\mathbf{X} \mathbf{T} d\mathbf{u}$

$= (d\mathbf{u})^T \mathbf{G}_\mathbf{U} d\mathbf{u}$

即旧基$\mathbf{X}$下的度规 $\mathbf{G}_\mathbf{X}$ 、新基$\mathbf{U}$下的度规 $\mathbf{G}_\mathbf{U}$ 满足关系式

$\mathbf{G}_\mathbf{U} = (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}})^T \mathbf{G}_\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = (\mathbf{T})^T \mathbf{G}_\mathbf{X} \mathbf{T}$

显然，度规（二阶张量）的变换遵循“协变”规则。

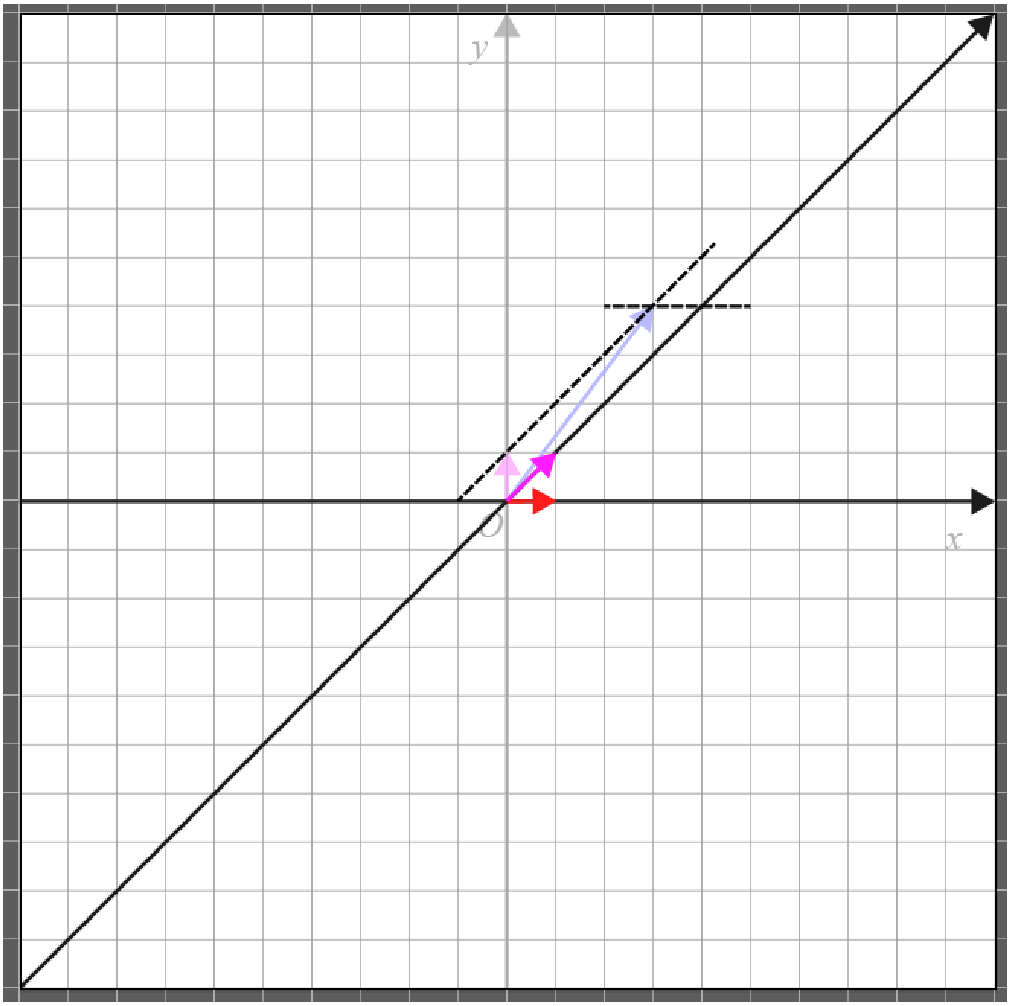
3 赠送一个例子

在变换矩阵T(剪贴变换)下：

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

新基(协变基底)： $\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

逆变分量就是： $\begin{bmatrix} A^{1'} \\ A^{2'} \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$



基底左乘坐标　vs　坐标读数右乘基底

注意表达重点：主语在前，动词代表主语位置。宾语代表参考的位置。

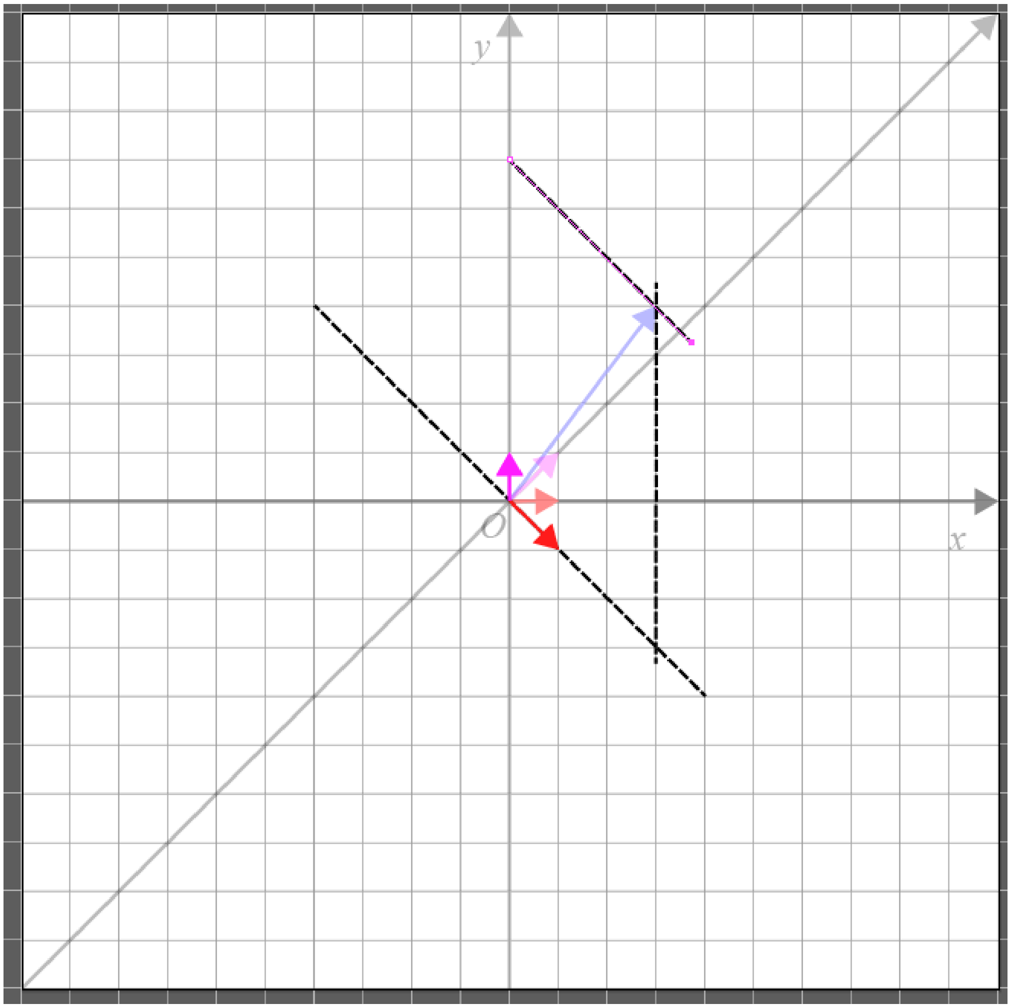
第一句话以坐标为基础，新基底（一套基）下，每个基分量的单位和方向都有变化，那么新基组成的矩阵正代表着这种变化。所以将坐标看成一个矢量，基底左乘矢量就可以理解成将矢量用我们的视角的变换矩阵进行了改变。最后得到新基底视角下的新坐标读数。

反过来想，也可以看做是用我们视角下的坐标右乘新基。第二句话以新基底作为基础（本来新基就代表着我们视角下的新基），而坐标是我们视角下的读数（这个读数意思就是读出每一个坐标分量中的数字）。可以把这时候的坐标看成是一个系数组成的矩阵。但这个矩阵只包含一个向量，并且是列向量。列向量只能右乘。那么站在任意基（不管新旧）的角度，右乘一个系数变换，最后得到新基底视角下的新坐标读数。

以上这种翻来覆去的思考代入。是线性变换的本质。

新基(逆变基底)：$\begin{bmatrix} \mathbf{e}^{1\prime} & \mathbf{e}^{2\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

协变分量就是：$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} = T^T \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$



可知：$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

4 度规张量

协变基底与逆变基底的关系：

$\vec{g_i}\cdot\vec{g^j}=\delta^i_j$

那么对应的逆变分量组成的向量和协变分量组成的向量之间必存在一个线性变换G。它是逆变到协变的线性变换对应的矩阵。称为协变度规张量，G^{-1}称为逆变度规张量。

第一个作用：升降指标（上标下拉，下标上升）。

$p^i=g^{ij}p_j, p_i=g_{ij}p^j$

第二个左右：度规。长度是一个标量。

矢量的标量就是长度。它在不同的参考系下有相同的数值。内积就是标量。用内积来定义长度。矢量自己与自己内积，就能定义出长度的平方。

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|cos\theta$, 方向一致夹角为0，$cos\theta=1$.

把两个向量$\vec{\alpha},\vec{\beta}$分别用协变分解、逆变分解（基底符号为g）。

$\begin{cases}\vec{\alpha}=\alpha^i\vec{g}_i & \text{逆变分量乘以协变基底}\\ \vec{\beta}=\beta_j\vec{g}^j & \text{协变分量乘以逆变基底}\end{cases}$

其中i，j的关系满足$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_j^i$，克罗内克的上下标无顺序之分。

那么 $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (\alpha^i \beta_j) \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \alpha^i \beta_j \delta_j^i$

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha^i \beta_j$ 内积可以被协分量、逆分量相乘表达

自己与自己的内积等于长度的平方。

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^i a_i \\ a_i = g_{ij} a^j \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^i g_{ij} a^j$$

写成矩阵形式，就有：

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 = \vec{a}^T G \vec{a}$

度规就是确立了度量的规则：它有着能把任意坐标系下的分量，加工成长度的能力。

5 再送一个点积原理

点积有两种定义方式：代数方式和几何方式。通过在欧氏空间中引入笛卡尔坐标系，向量之间的点积既可以由向量坐标的代数运算得出，也可以通过引入两个向量的长度和角度等几何概念来求解。

一个向量，可以分解成协变基底乘以它的逆变分量（下标）。基底都是拿来左乘的。

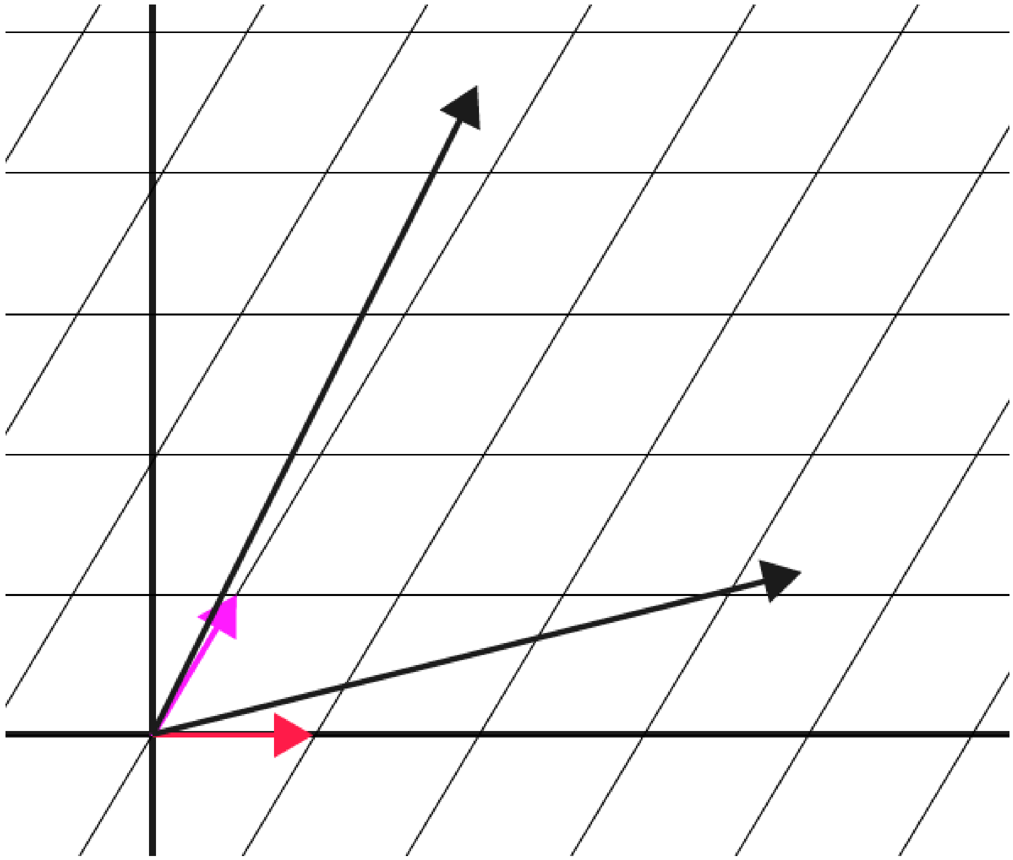
一个向量，最低也是用2阶矩阵来表示。线性变换的基础：1.原点保持固定（否则平面上的点就没有坐标，也就没有意义了）。2.网格线保持平行且等距分布（直线依旧是直线）。当向量以点坐标的方式表达出来，原点就很重要了。原点就代表了向量的起点。而两个向量相乘，就可以看成两个起点都在原点的向量所描绘出的张成或者伸展出的一幅画卷。画卷上的网格的单位长度和高度都可以依据这两个向量中的任意一个向量来确定。一旦确定网格，那么画卷上所有的覆盖，就都有了变换的可能。这种网格可以在我们的视角中进行换算。只要我们的视角的网格和画卷上的网格的原点对齐即可。而点积，其名字就是两个点的数量积。离不开原点。而左面的向量看成一个函数映射变换。就需要转换到单位长度下的变换。而右面的向量也可以看成是同样的函数映射变换。只要确定了这两个变换在网格上的直线方程。那么就能知道这两个点距离原点的距离。那就是他们的模。而他们之间的夹角，他们各自的长度，这三个长度就可以确立这个网格的特色。这三个值可以反应网格。网格也能反应这两个点的坐标。

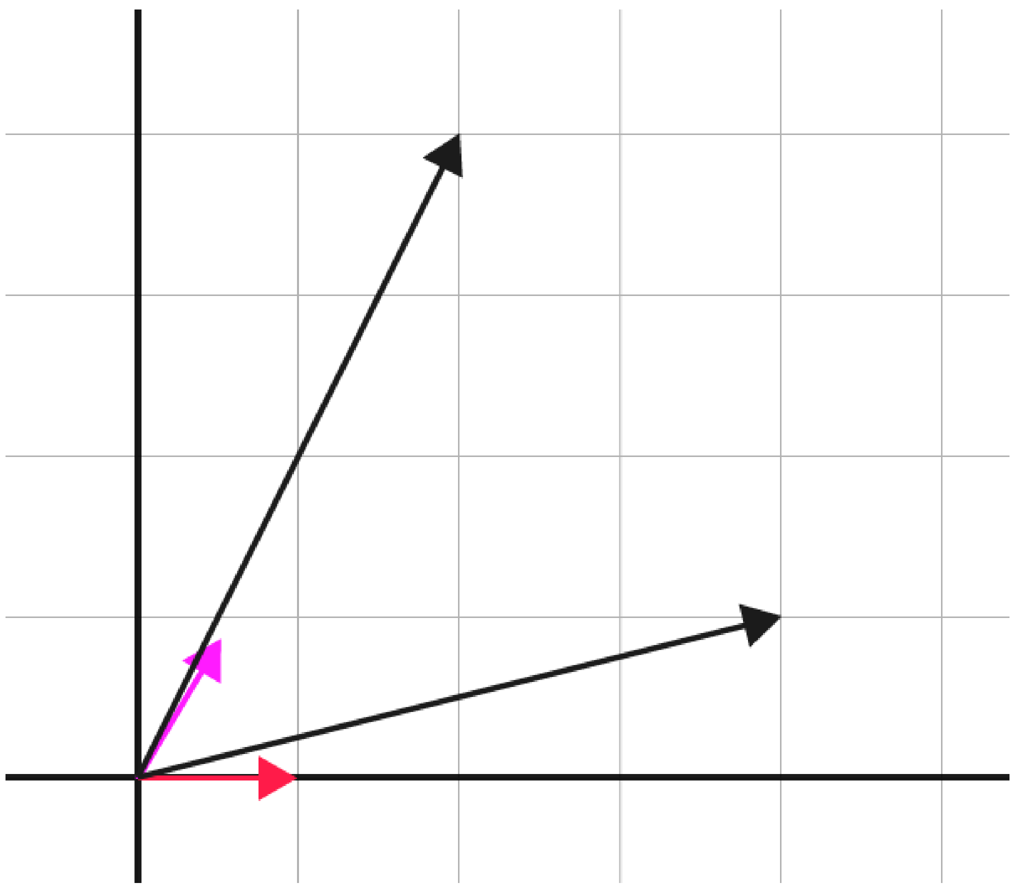
一个向量就是一个变换法则。这个向量一经在我们的视角（平面直角坐标系）确定。就可以确定我们平面所有点坐标在这一条直线上的映射。这是一个满射，对于平面上的坐标，在直线上会有重复。在这条直线与我们的平面直角坐标系的x轴。就又可以确定一个斜角坐标。单位长度也可以确定。那么这时在这个斜角坐标系上的乘法，就满足我们直角坐标系下的 坐标输入 到这条直线上的投影，与刚才在我们直角坐标系下确定这条直线的向量的乘法。就是这条直线上，确定向量，与我们输入向量的模相乘。

直角坐标系下两个向量：$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 在y轴顺时针旋转60度的斜角坐标系 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.577 \\ 0 & 1.155 \end{bmatrix}$ 下的坐标是：

$\begin{bmatrix} 3.423 \\ 1.155 \end{bmatrix}$ 以及 $\begin{bmatrix} -0.308 \\ 4.62 \end{bmatrix}$

如图：

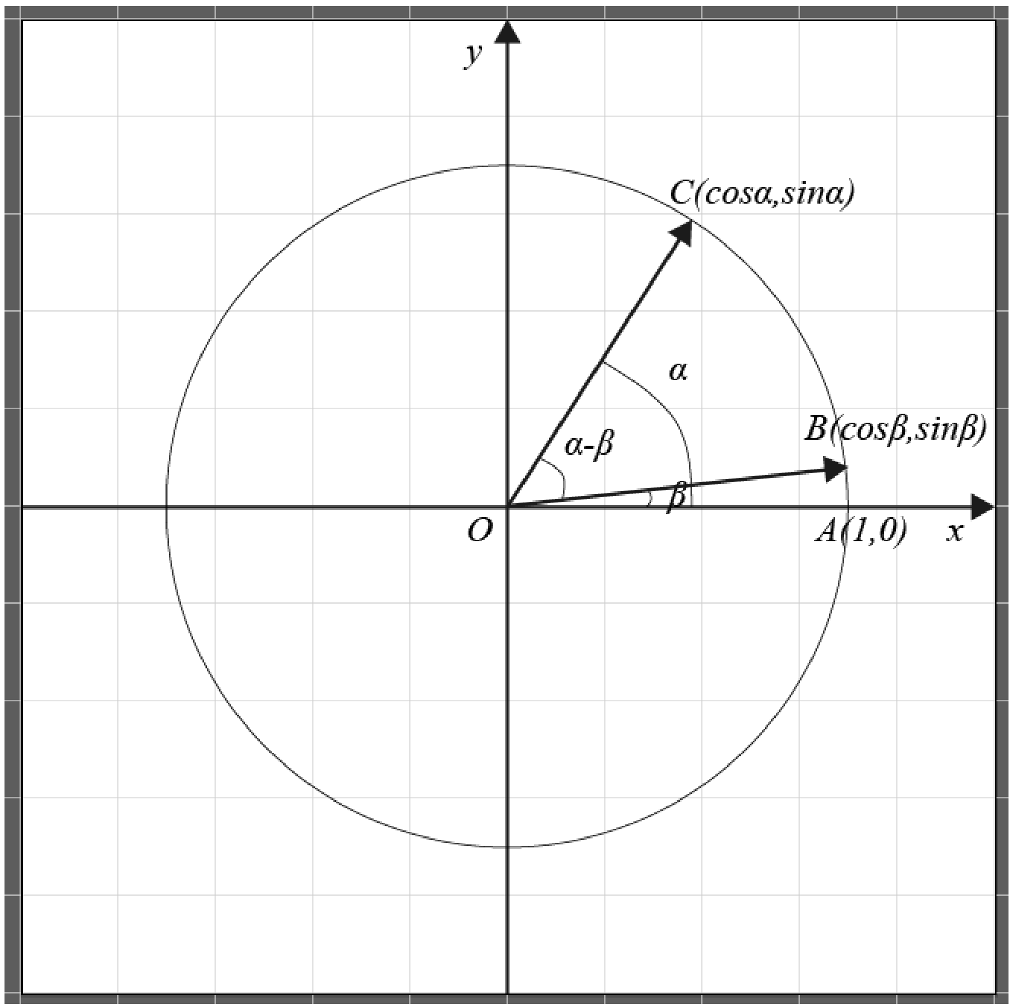




$ac + bd + (ad + bc)cos(60°) = 3.423 * (-0.308) + 1.155 * 4.62 + (3.423 * 4.62 + 1.155 * (-0.308)) * 0.5 = 12.011076$

证明斜角坐标系下，点积不仅仅需要分量相乘相加。还需要斜角坐标系本身的角度作为系数。

二角和差公式证明：



如图所示，在笛卡尔直角坐标系下，ΔOBC中由余弦定理（见上一篇的余弦定理立体几何证明法），有

$|BC|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|cos(\alpha - \beta) = 2 - 2cos(\alpha - \beta)$

另一方面，由两点间的距离公式，有

$|BC|^2 = (cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2 = 2 - 2(cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta)$

综合两式即得

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x \\ i_y & j_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x a_i + j_x a_j \\ i_y a_i + j_y a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \end{bmatrix} a_i + \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix} a_j$

其中，只有第一次i，j是加粗斜体，代表了基向量i，和基向量j。以后的i，j都是正常体，代表了标量，代表了数值。基底乘以坐标读数就是向量。

笛卡尔直角坐标系下协变基底$\begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \end{bmatrix}$肯定是互相垂直的（$cos(90°) = 1$），必有：

$\vec{a_i} \cdot \vec{b_i} = a_i b_i$

点积的代数定义：

$$\begin{aligned}&\vec{a}\bullet\vec{b}=a_i\cdot b_i+a_j\cdot b_j\\ &\begin{bmatrix}x_1 & y_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2\end{aligned}\tag{5}$$

注意：以上等式的右边点代表乘号，并不是点积的符号。

斜角坐标系（斜坐标系）下，点积的代数定义：

若$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$，

$$\begin{aligned}|c|^2&=\vec{c_i}\bullet\vec{c_j}=(\vec{a_i}+\vec{b_i})(\vec{a_j}+\vec{b_j})\\ &=\vec{a_i}\vec{a_j}+\vec{a_i}\vec{b_j}+\vec{b_i}\vec{a_j}+\vec{b_i}\vec{b_j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}&=(a\vec{i}+b\vec{j})\bullet(c\vec{i}+d\vec{j})\\ &=ac\vec{i}\bullet\vec{i}+bd\vec{j}\bullet\vec{j}+(ad+bc)\vec{i}\bullet\vec{j}\\ &=ac+bd+(ad+bc)\vec{i}\bullet\vec{j}\end{aligned}\tag{6}$$

$\vec{i}\bullet\vec{j}=cos<\vec{i},\vec{j}>$

$\Rightarrow\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta}=ac+bd+(ad+bc)cos<\vec{i},\vec{j}>$

注意：其中$\vec{i},\vec{j}$的夹角就是坐标系x轴和y轴的夹角。而不是两个要相乘的向量的夹角!!! 正因为点积有分配率，所以才能像乘法一样有杨辉三角(二项式定理)。当直角坐标系时，形成克罗内克符号。

在斜角坐标系下，点积的定义好丑啊，在数学家眼里，不能容忍用两种度量方式来描述一项运算，又知道平面上所有问题都是三角形问题。三角形的一个角可以用三条边的长度来确定，那么如何把角度隐藏起来，只用长度的大小就能表达两个向量之间的方向？向量不就是大小和方向的问题么，我们把方向也用大小来表示。就有了点积的度规张量形式。

点积的几何定义：

点积体现的几何意义就是反应了两个向量的夹角大小。有两个分量的大小，且有夹角的大小就一定能确定这两个向量构成的坐标系平面。就一定能确定这个变换规则。有了这个规则，也就有了度量的标准。也就是固定了度规。

$$\begin{aligned}\vec{a}\bullet\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta\\ &=abcos(\alpha-\beta)=ab(cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta)=a_ib_i+a_jb_j=x_iy_i+x_jy_j\end{aligned}\quad\text{顺便证明了上式}\tag{7}$$

点积的迭代（嵌套）定义：

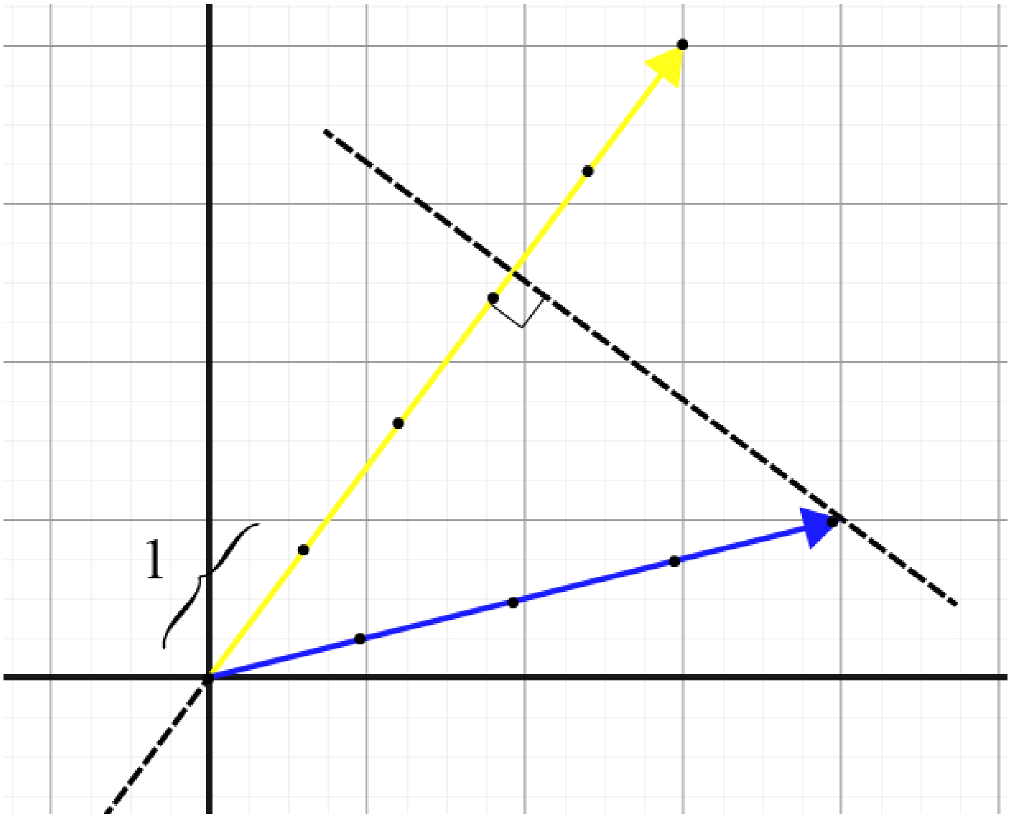
因为点积的实质就是两个向量相乘。我们赋予左侧向量和右侧向量不一样的职责。左侧负责线性变换，右侧负责坐标。那么可以写成左侧的行向量变换乘以右侧的列向量坐标：

$1\times n$的矩阵乘以$n\times 1$的矩阵。

左侧的矩阵可以理解为线性变换，右侧的理解为坐标，那么这个变换就能将该笛卡尔直角坐标系下右侧的坐标，投影到左侧这个变换矩阵所确立的直线上。得到右侧坐标的长度，再乘以左侧变换矩阵单位化长度之后分离出来的系数，就能得到在这个直线上两个向量相乘的长度。这就是点积的意义。

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\begin{bmatrix}u_x & u_y\end{bmatrix}|a|\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\end{bmatrix}=|a||b|cos\theta$

其中，$\begin{bmatrix}u_x & u_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_x\\ b_y\end{bmatrix}$会得到$\vec{b}$在$\vec{u}$上的距离。$\vec{u}$为一条在该坐标系下，单位长度为该坐标系单位长度，方向为$\vec{a}$方向的直线。



在笛卡尔坐标系下，两个向量的点积等于向量对应分量的点积相加。而在斜角坐标系下。分量的点积后面还要补充斜角坐标系的相关部分。点积始终代表了不同坐标系下两个向量相乘的长度。

两个向量的点积等于两个向量的模相乘再乘以夹角的余弦。

矩阵相乘(左乘的代数写法)：

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}t_1 + b_{12}t_2 \\ x_2 = b_{21}t_1 + b_{22}t_2 \\ x_3 = b_{31}t_1 + b_{32}t_2 \end{cases}$$

从t1，t2到y1,y2的线性变换则

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})t_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})t_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})t_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})t_2 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}$$

6 线性代数的本质

当给出一个有方向、有长度的量。就可以用同样的两个有方向、有长度的量来表示。于是一个量被两个分量来表示。满足

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

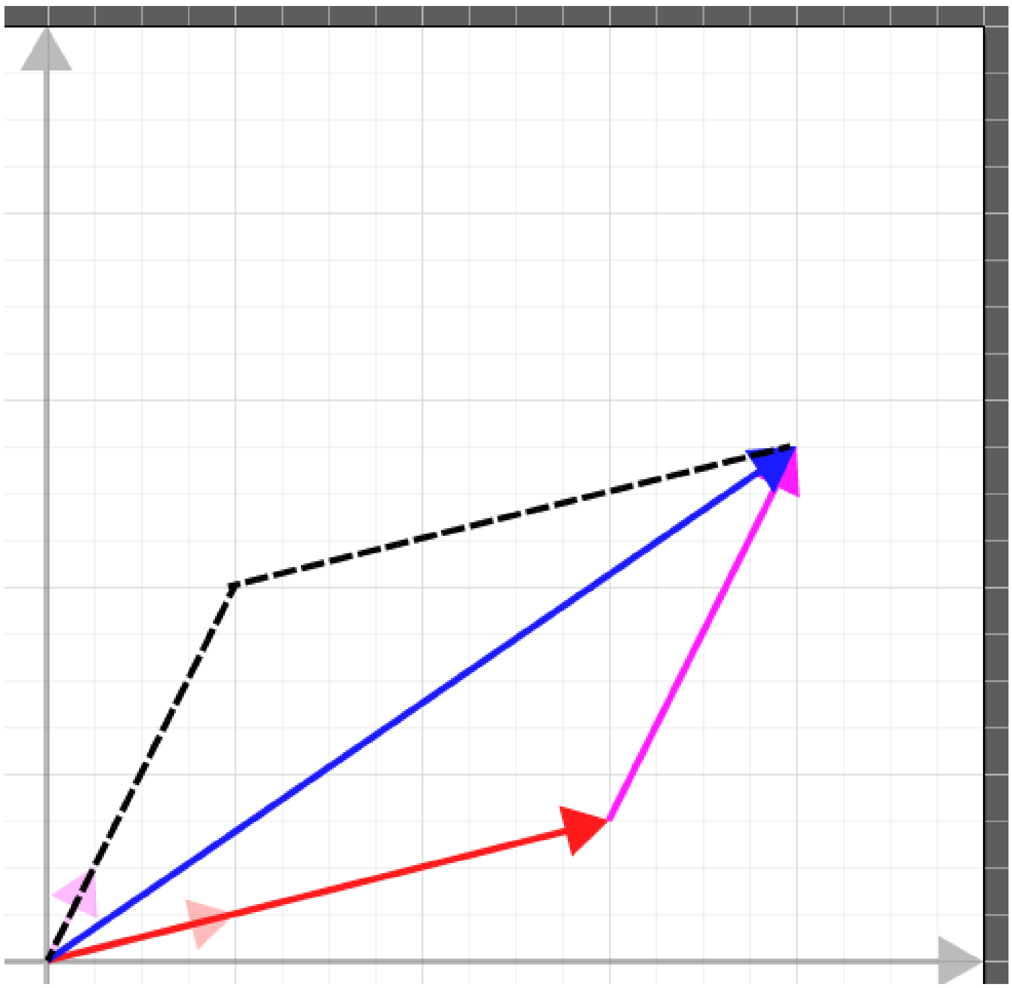
则$\vec{a},\vec{b}$围城的平行四边形的面积就是两个向量坐标组成的矩阵的行列式的值。这个面积如果不为0，那么说明这两个向量可以张成空间（面）。三个向量可以张成立体。

两个向量之间的夹角，可以用两个向量的模的积为分母，两个向量的点积为分子来确定。这样就把角度问题，转换成了坐标的代数计算。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2=abcos\theta$

$cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{ab}$

参考（6）



$$3\vec{i}+4\vec{j}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}3+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}4=\begin{bmatrix}4\times3+1\times4\\1\times3+2\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

$\vec{a}=3\vec{i}$

$\vec{b}=3\vec{j}$

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{a_i}\vec{b_i}+\vec{a_j}\vec{b_j}=\vec{a_i}\bullet\vec{b_i}+\vec{a_j}\bullet\vec{b_j}=a_ib_i+a_jb_j$

举例：

$$\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\end{bmatrix}3+\begin{bmatrix}b_x\\b_y\end{bmatrix}4=\begin{bmatrix}3a_x+4b_x\\3a_y+4b_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{a}&\vec{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

线性代数，当你描述一个矢量的时候，最简单的方法，就是直接说出它终点指向的那个坐标。也就默认了它的起点是你的圆心。如果你描述了她的起点和终点，那么你就是在用一个原点到她起点的矢量加上另一个矢量，而这个矢量的确定是你报出的两组坐标相减得到的一个横向和纵向的比例。而

所有这些坐标以及比例的基础，都是 $\hat{i}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \hat{j}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

将它们写成矩阵，隐藏在所有矢量的左边，就是一个默认变换。

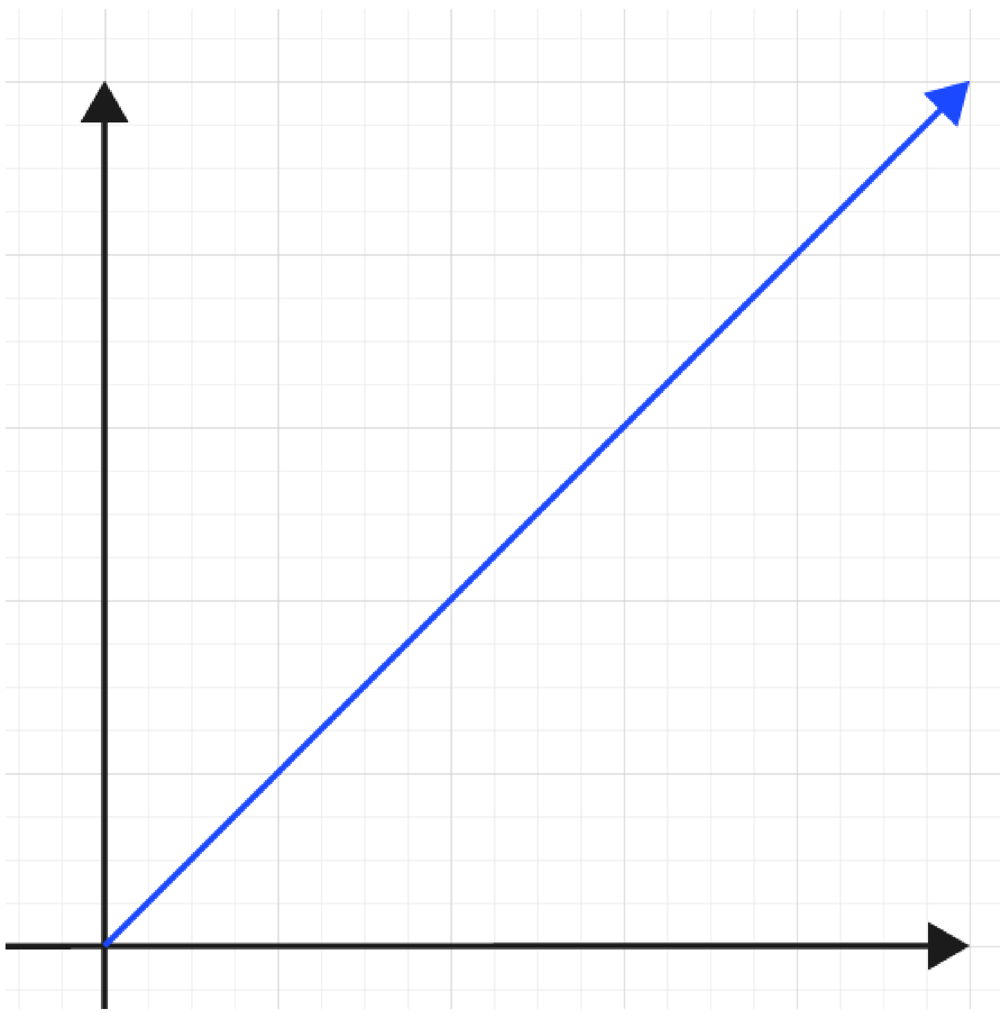
然后利用旋转变换 $\begin{bmatrix}cos(\theta) & -sin(\theta)\\ sin(\theta) & cos(\theta)\end{bmatrix}$

然后利用拉伸变换 $\begin{bmatrix}i\times length_{height} & 0\\ 0 & j\times length_{width}\end{bmatrix}$

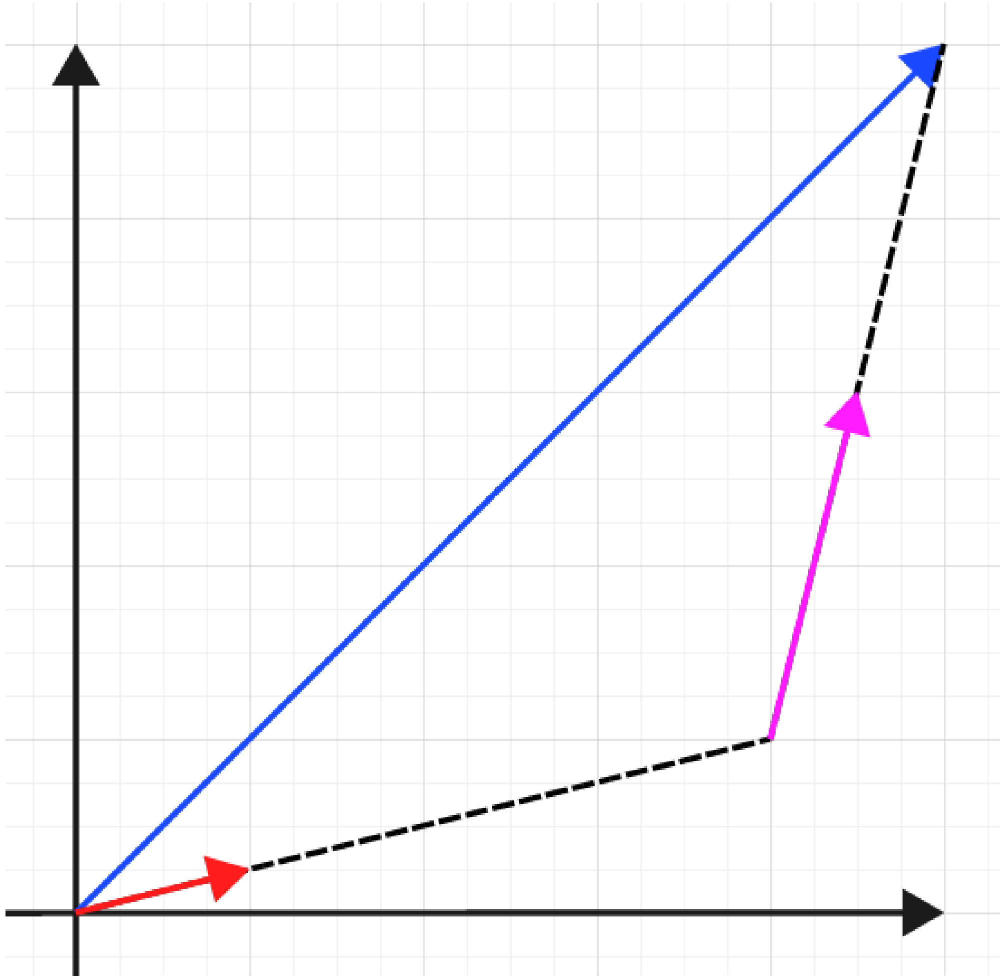
然后利用剪切变换 $\begin{bmatrix}1 & 1\times length_{width}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

如何将一组基，线性变换到另一组基呢？

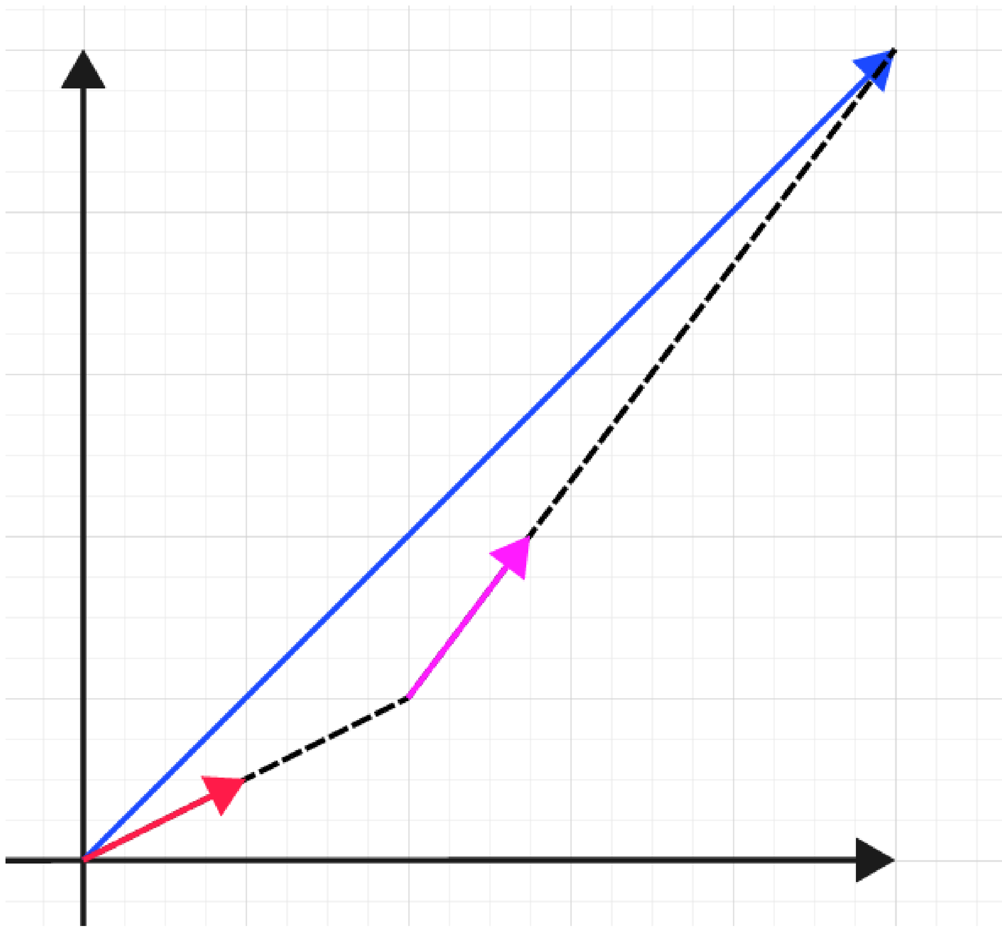
在我们看来，一个矢量的坐标是$(20,20)$，



在1空间，它的基坐标$\hat{i}(4,1)$,$\hat{j}(2,8)$，看来，这个矢量的坐标是$A^1(4,2)$



在2空间，它的基坐标$\hat{i}(4,2)$,$\hat{j}(3,4)$，看来，这个矢量的坐标是$A^2(2,4)$



由我们视角的基坐标 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 转换到1空间的基坐标 $\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 8\end{bmatrix}$ 用到变换 $T_1 = \begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 8\end{bmatrix}$，实际上就是协变基底组成的矩阵。

由我们视角的基坐标 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 转换到2空间的基坐标 $\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$ 用到变换 $T_2 = \begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}$

经计算 $T_1^{-1} = \begin{bmatrix}0.267 & -0.067\\-0.033 & 0.133\end{bmatrix}$

则有 $A^2 = T_2 \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} T_1^{-1}A^1$ 先把起点的基的坐标转换到我们的基的坐标，然后再转换到终点的基的坐标。

T_1、T_2中的列向量就是协变基底，坐标读数A^1, A^2就是逆变分量。

$T_1A^1 = T_2A^2$可见两种变换对应个坐标都能转换成我们视角下看到的矢量的坐标。

由基底T_1变换到基底T_2

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= T_1P \\ T_1^{-1}T_2 &= T_1^{-1}T_1P \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = T_1^{-1}T_2 \tag{8}$$

同时有： $T_1 = T_2P^{-1}$， $P^{-1} = T_2^{-1}T_1$

P为过渡矩阵，这里右乘的原理就是$T_1P = T_1T_1^{-1}T_2 = T_2$.

这里说说什么是基底。仔细想想，基底就是站在我们的视角，描述另一个视角的基础。基底的本质就是两个列向量描述的新的度量标准。基底本身是个方阵，那么是矩阵就代表变换。基底就是代表了如何把我们的视角下的坐标转换到她的视角下的坐标。只不过使用的时候要用它的逆矩阵来运算。

P^{-1}有什么用？继续往下看。它能直接用于左乘坐标。

$$\begin{bmatrix} A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \end{bmatrix} = T_{coordinates} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

将坐标A^1变换为A^2的$T_{coordinates}$，就是过渡矩阵的逆P^{-1}.对于T_1为单位矩阵，也就是我们的视角为起始视角的情况下，过渡矩阵的逆就是T_2^{-1}.

上例中$P = \begin{bmatrix} 0.934 & 0.533 \\ 0.134 & 0.433 \end{bmatrix}$

另一方面，可不可以用左乘来表示基的变换呢？当然可以!!!

将基T_1变换为T_2的T_{basis}，可以先将T_1变换为我们的视角，用到T_1^{-1}，然后再复合变换T_2.

$$T_{basis} = T_2 T_1^{-1} \tag{10}$$

$$T_{basis} = T_2 T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.969 & 0.131 \\ 0.402 & 0.398 \end{bmatrix}$$

$$T_{basis} T_1 = \begin{bmatrix} 0.969 & 0.131 \\ 0.402 & 0.398 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.007 & 2.986 \\ 2.006 & 3.988 \end{bmatrix} = T_2$$

7 法则总结

7.1 交换律

加法有交换律、结合律。

乘法有交换律、结合律。

点积有交换律、结合律（点乘就是乘法在斜角坐标系下的拓展）。

乘法中的两个数，一般不会是同一类的代称。比如一排苹果是5个，2排苹果就是10个。$5 \times 2 = 10$.当基底发生变化时，我箱子和你箱子不一样长/宽，我一排放6个，那$6 \times 2 = 12$.但是，交换两个数的地位，最后的数量都不影响，那么两个数的地位就是平级的。解释的意义可以不同，但是得到的结果一样。像这样的例子，在程序语言设计的时候。有的程序员就很重视行列，比如他定义一个列表：

A = [] A1 = [a11, a12, a13, a14, a15] A2 = [a21, a22, a23, a24, a25] A=[A1, A2]

当他取A[2][1]的时候，得到a21.

当遇到方阵的时候，有的程序员，这么干： B = [] B1 = [b11, b21, b31] B2 = [b12, b22, b32] B3 = [b13, b23, b33] B = [B1, B2, B3]

当他取B[2][1]的时候，得到b12.但是聪明如他，他颠倒i, j他要得到b21，他就取B[1][2].很反人类，但是一点儿也不影响循环逻辑。在别人

```
for i in m
  for j in n
```

的时候，他颠倒过来：

```
for j in m
  for i in n
```

乘法上档次了，所以乘法和加法的结合，就有了分配率。

以上的操作，对应的是实数域。

将操作的元素换成矩阵：

矩阵的加法，有交换律、结合律

矩阵的乘法只有结合律。

这时候等式两边同加、同乘都没问题。问题在于同乘的时候，要区分左乘和右乘。意义就大不相同。

向量的点乘，有交换律、结合律、分配率。

7.2 关于相乘

矩阵与向量相乘，是“变换函数”对输入向量的线性变换。

矩阵与矩阵相乘，是线性变换的叠加。

向量与向量相乘，是点积。1×2的矩阵，就是一种将二维向量映射到一维直线上的变换。

给出一个空间的基永远是这个基在我们视角下（坐标系下）的基的坐标；给出一个坐标，它的左边永远存在着一个基（默认就是我们的基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$）。基与坐标的乘积。就会得到一个我们视角上看到的向量。当处于三个不同 平行世界/时空 的人。描述这同一个向量的时候。他们之间的变换，就以中间人，我们的世界进行转化。分为坐标的转化（左乘）、基的转化（右乘）。

1. 输入的如果是个变换，那么整个式子就是变换的叠加。
2. 输入的如果是一个向量，那么整个式子就是对向量的一个变换。
3. 输入的如果是一个基。那么整个式子就是基于这个基的变换。当然，这个左乘变换和右乘变换，都能达到相同的效果，但是是两个不同的矩阵。后面讲如何得到这两个矩阵。

新基左乘坐标/坐标右乘新基（新基在左、坐标在右）的含义：新基可以将他看到的坐标，转换成我们看到的坐标。反过来，新基的逆，可以将我们看到的坐标转换成新基下的坐标。重点来了，如何将我们看到的变换，转换到新基下看到的变换呢？

过程是这样的，首先詹妮弗的基左乘一个詹妮弗的坐标，就变成了我们看到的坐标，然后在这个坐标上进行我们的变换，得到一个我们旋转了90度$\hat{\imath}, \hat{\jmath}$的我们的基变换之后的坐标，然后再用詹妮弗的基的逆左乘刚才的结果。就转换回了詹妮弗的坐标。经历了我们这个中间代理人。让詹妮弗享受了我们替她做的一个基90度旋转的事情。形如：$A^{-1}MA$的一种变换，M是我们看到的变换，则该式代表了一种把我们的变换转换成詹妮弗的变换的变换。

那么如果用詹妮佛的基乘以我们的坐标会得到什么呢？就相当于找到了我们视角下的一个矢量被两个坐标轴像筷子一样夹住，进行了翻转腾挪，挤压变换到了詹妮弗的那张旋转、剪贴之后的空间。所展现的矢量的样子。

点积就是两个向量相乘，逐对儿厮杀。在几何上等于投影。在几何上，谁投影谁。都可以把短的那一方看成是一个单位长度。虽然也可以将长的一方看成单位长度。就像分子和分母。总会有那么个反人类的看法不一样。

点积可以将左边的向量想象成一种变换。这也揭示了向量的本质。向量就是一种将多维降为一维（标量）的变换。这种变换是一种非常美丽的对偶关系（见上一段话的反人类分子分母）。

映射：箭和靶。所有的箭都射在靶子上。说明箭筐X($x \in X$)到箭靶Y($y \in Y$)有射箭这个人f的映射。记作：

$f : X \to Y$

$y = f(x)$，x称为自变量，y称为因变量。

1. 满射：箭扎满了靶子，报所有的靶子的坐标（像），都能找到箭（原像）。叫做满射。（靶子比较小吧）。降维映射，一般会导致一一映射降成满射。
2. 单射：每只箭（原像）都有自己的位置（像）。不会出现第二支箭扎在第一支箭的屁股上（不同原像拥有相同的像比如抛物线上下翻转的一元二次方程函数）。
3. 一一映射：既是单射，又是满射。

视角就是相同向量在不同视角下有着不同的坐标。不同视角也就意味着基向量不同。变换永远是我们视角下的变换，而坐标则可以是不同视角下的坐标。但是变换和坐标需要相互配合，这时候结合就很有意思：

1. 如果一个基（左）结合一个变换（右），那么结合就是一个新基。这个形式叫基变换。但是过渡矩阵称为P而不是T。T分两种，一种是将老坐标变换成新基下的新坐标的矩阵$T_{coordinates}$.另一种是将所有基向量同时变换成新基向量的矩阵T_{basis}。
2. 如果变换（左）结合一个坐标（右），那么结合就是老坐标在P^{-1}变换后的新坐标$\begin{bmatrix} A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix}$；另外变换矩阵也可以说成是一个新基，新基配合新坐标就是我们视角下看到的一个向量的坐标$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{1\prime} \\ A^{2\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix}$.

注意：很多高手在这里犯了错误，单位正交基的$P^{-1} = T^{-1}_{coordinates} = T^{T}_{coordinates}$.

8 比较

视角变换是：

詹妮弗视角下的变换 = [詹妮弗的基的逆][我们的变换][詹妮弗的基]

设协变度规张量为G，则：

$|\vec{a}^2| = a^i a_j = a^i g_{ij} a^j$

$= \vec{a}^T G \vec{a}$

二次型：

9 旋转、拉伸、剪贴（倾斜）

对于一个矢量（向量）的左乘变换，只有旋转、拉伸。

对于一个基的右乘变换，全覆盖的情况下需要：

旋转+剪贴。其中蕴含着解决了拉伸的问题。

10 向量到底是什么

作为物理课代表，我们一定要分清什么是物质、什么是力。力可以让物体运动。但是运动的速度这个矢量，体现了大小和方向。也因此，配套的就有力也是矢量。位移也是矢量。有方向，就会有夹角，有夹角就和没有夹角不一样。怎么体现这个不一样。那就是功。

作为程序员，我们在面向对象时一定要分清什么是属性、什么是方法。属性是阶跃的，在某个过程的前后是不变的状态。方法是操作，是外力，产生的效果就是变化。而质量这个属性。竟然也和力一样、看不见、摸不着。在不同的重力常数（比例系数）下，有不同的重量。并且体现质量大小的是惯性。而惯性又与加速度和力密切相关。

作为数学课代表，一切都能用数字描述。包括向量。当你把向量看成是静止的状态，那么它可以是一个最低两个分量表示的坐标（列向量）。当你把向量看成是动态的过程，那么它可以是一个最低二阶的线性变换矩阵。还能最低到基底纵坐标都为0，形成一个1×2的行向量。投影到一条直线上。形成满射。就是这种方向加大小的东西。在任意维度都可以分出任意维的分量。且线性无关。

向量一经表达，就扯出了一个笛卡尔坐标系。笛卡尔当年是看着蜘蛛在墙上织网来解决用几何图形来表示方程。在代数和几何上架起了一座桥梁。创造了用代数的方法来研究几何图形的数学分支——解析几何。同一个向量在不同的坐标系基底下有不同的读数（坐标）。但是各自的基底左乘各自的坐标，都能得到我们视角下的坐标。而我们的坐标，默认前面就是一个$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$的基底矩阵。不光向量被笛卡尔坐标系表达了，附带向量的加法和乘法都对应表达清楚了。当我们通过在欧氏空间中引入笛卡尔坐标系。也就是长度和夹角等几何特性都满足线性。那么乘法的分配率就带着方向一起起作用。造就了点积在斜角坐标系和直角坐标系下都相等这个特性。标量在矢量相乘后相等。已经不同于矢量的加法。成为了一个度量。这个度量在不同的坐标系下保持相同的规则不变。那就是度规张量。

11 斜角坐标系下的点积

以点积的几何定义来推导代数形式：最基础的两个单位向量$\vec{i}, \vec{j}$夹角是$cos\varphi$，则斜角坐标系基底$\begin{bmatrix} 1 & cos\varphi \\ 0 & sin\varphi \end{bmatrix}$下，坐标$\begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix}$，$A^1$代表向量在i轴上的分量，$A^2$代表向量在j轴上的分量.那么：

$$
\begin{aligned}
(A^1 + A^2) \cdot (B^1 + B^2) &= A^1 \cdot (B^1 + B^2) + A^2 \cdot (B^1 + B^2) \\
&= A^1 \cdot B^1 + A^1 \cdot B^2 + A^2 \cdot B^1 + A^2 \cdot B^2 \\
&= A^1B^1 + A^2B^2 + (A^1B^2 + A^2B^1)\vec{i} \cdot \vec{j}
\end{aligned}
$$

$$\because \vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 1cos\varphi$$

$$\therefore (A^1 + A^2) \cdot (B^1 + B^2) = A^1B^1 + A^2B^2 + (A^1B^2 + A^2B^1)cos\varphi$$

12 点积的数学定义

定义：设 V 是实数域 R 上的线性空间，其中 $\alpha, \beta, \gamma \in V$; $a, b \in R$.则定义一个实数 $< \alpha, \beta >$ 满足

(1) 对称性：$< \alpha, \beta >=< \beta, \alpha >$

(2) 线性性：$< \alpha + \beta, \gamma >=< \alpha, \gamma > + < \beta, \gamma >$

$< a\alpha, \beta >= a < \alpha, \beta >$

(3) 正定性：$< \alpha ﬁ \alpha > \geq 0$,当且仅当 $\alpha = 0$, $< \alpha, \alpha >$.

则称$< \alpha, \beta >$为α和β的内积。

显然$< \alpha, \beta > = \alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta| cos\theta$是一种内积的定义。

那么还有没有其他的内积定义呢？

显然还有：

$alpha = (a_1, a_2, a_3), \beta = (b_1, b_2, b_3)$，定义$< \alpha ﬁ \beta = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$易验算，上述定义也符合内积的三个要求。

可见，对于同一个集合(线性空间)，可以定义不同的内积，和“夹角”。

$< \alpha, \beta > = \alpha \cdot \beta = |\alpha||\beta| cos\theta$

是一个在3维数域中一个很常用的内积定义，但你要明白，它也只是众多内积定义中，普通的一个。

参考文献：[1] 邱启荣. 矩阵理论及其应用[M]. 北京:中国电力出版社, 2008. 22-23

13 数学家的思维（执着）

一维只有二向，要么前进、要么后退。我们称之为正、负。

二维就有全向。二维也是线性的基础。能够描述线性法则8条：

1.加法交换律：$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

2.加法结合律：$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

3.0加无影响：There is a vector 0 such that $0 + \vec{v} = \vec{v}$ for all $\vec{v}$

4.湮灭得0：For every vector $\vec{v}$ there is a vector $-\vec{v}$ so that $\vec{v} + (-\vec{v}) = 0$

5.数乘可复合：$a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$

6.单位乘无影响：$1\vec{v} = \vec{v}$

7.数乘分配率：$a(\vec{v} + \vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

8.数加成分配率：$(a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

二维线性变换不光可以用二阶矩阵满足坐标变换，还能满足基变换。直接将基以列向量的形式按顺序向右排开，就可以得到非单位形式的基变换。基变换的基矩阵右乘过渡矩阵P。P的逆左乘老坐标就可以获得新坐标。P等于我们视角坐标到终点的坐标的变换与我们视角的坐标到起点的坐标的变换的逆的复合。基底就相当于一种对坐标的线性变换，只不过基底都会写成我们视角下的坐标排列形式。她的基底左乘她的坐标，就会得到我们眼中的坐标。这个式子对于深入理解的人来说很重要。如果看不懂，也就等于没有明白这一段话在讲什么。$P = T_1^{-1} T_2$.

对于斜角坐标系，有基底矩阵$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & cos\varphi \\ 0 & sin\varphi \end{bmatrix}$则

$\hat{i} \cdot \hat{j} = 1 \times cos\varphi + 0 \times sin\varphi = cos\varphi$

这个式子的重要意义在于反身迭代。首先，基底是写成了我们视角下直角坐标系的坐标表达。那么定义的就是我们直角坐标系下的点积。

为了在斜角坐标系下，依然有点乘的分配率。我们有：

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot (c\vec{i} + d\vec{j}) \\ &= ac + bd + (ad + bc)\vec{i} \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

我们用坐标转换的矩阵方式去找视角。首先令我们视角下的一个向量有坐标：$\vec{v}=\begin{bmatrix}A^1\\A^2\end{bmatrix}$，则用斜角坐标的基底左乘我们的坐标，就是斜角坐标系下的坐标

$$\begin{bmatrix}A^{1\prime}\\A^{2\prime}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^1\\A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i}\end{bmatrix}A^1+\begin{bmatrix}\hat{j}\end{bmatrix}A^2$$

根据上一个pdf中公式5，单位正交基的逆等于单位正交基的转置，又根据本pdf的公式1，可以推得：

$$\begin{bmatrix}A^1\\A^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i} & \hat{j}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A^{1\prime}\\A^{2\prime}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i}^T\\\hat{j}^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{1\prime}\\A^{2\prime}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\cos\varphi & sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^{1\prime}\\A^{2\prime}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{i}^T\cdot\begin{bmatrix}A^{1\prime}\\A^{2\prime}\end{bmatrix}\\\hat{j}^T\cdot\begin{bmatrix}A^{1\prime}\\A^{2\prime}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

观察发现：其中纵坐标将被旋转投影。

斜角坐标系下，如果如上例，只对y轴旋转，则，y在x轴上的分量，是我们视角下的垂线与x轴的交点的坐标，乘以斜角坐标系y轴与x轴的$cos\varphi$.

14 爱因斯坦求和约定

$$\left.\begin{aligned}\vec{\alpha}&=\alpha^i\vec{g}_i\\\vec{\beta}&=\beta_j\vec{g}^j\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha^i\beta_j\vec{g}_i\cdot\vec{g}^j$$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha^i\beta_j\delta^i_j$

根据爱因斯坦求和约定，单项式两次出现可写任意符号。简化为

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\alpha^i\beta_i$

更特殊的，矢量自己和自己内积：

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}||\vec{\alpha}|cos\theta$

$\because cos\theta=1$

$\therefore\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2=\alpha^i\alpha_i$

上式利用爱因斯坦求和约定：

规则1：如果你在单项式中看到两个重复的指标那么这代表求和（一般是1、2、3因为我们只有三个维度）。

规则2：哑指标用于求和出现两次，可以用其他哑指标代替。自由指标不表示求和，它出现一次，不能随意替换。

规则3：任何一个单项式都不能出现多于两次的相同指标。

规则4：在一个使用求和标记的等式中，等式两边的自由指标要匹配

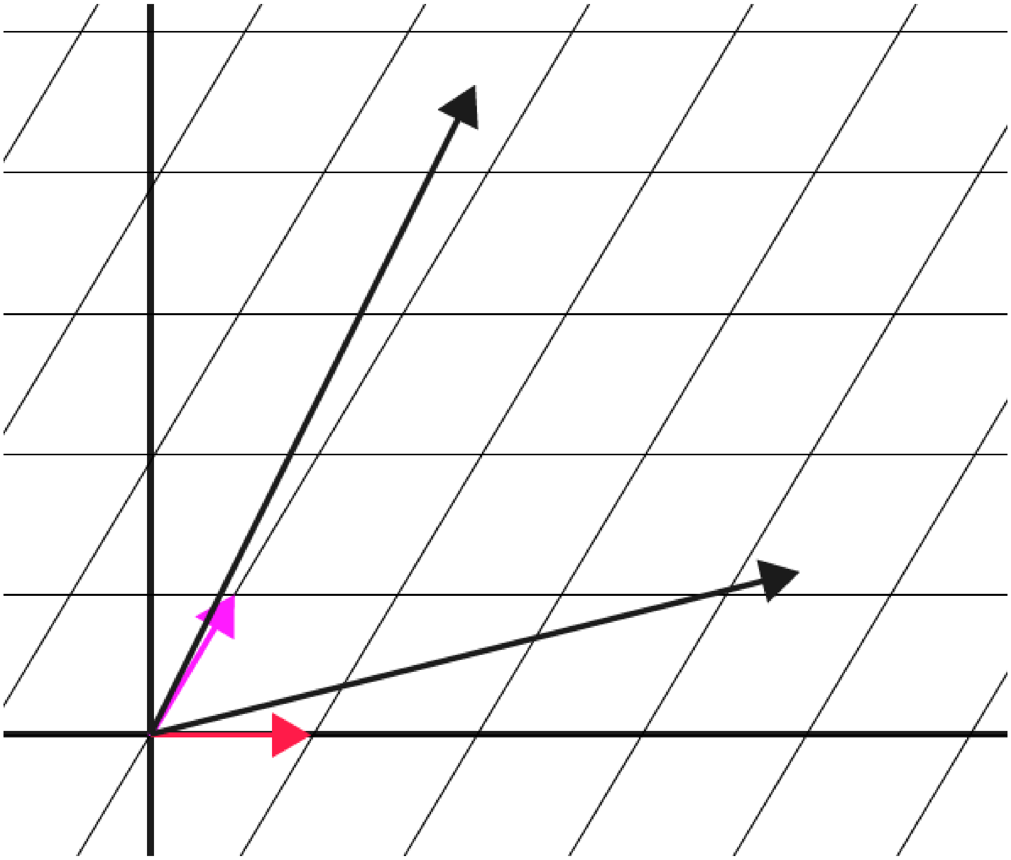
将度规张量的升降指标功能$\alpha_i=g_{ij}\alpha^j$代入其中，则有：

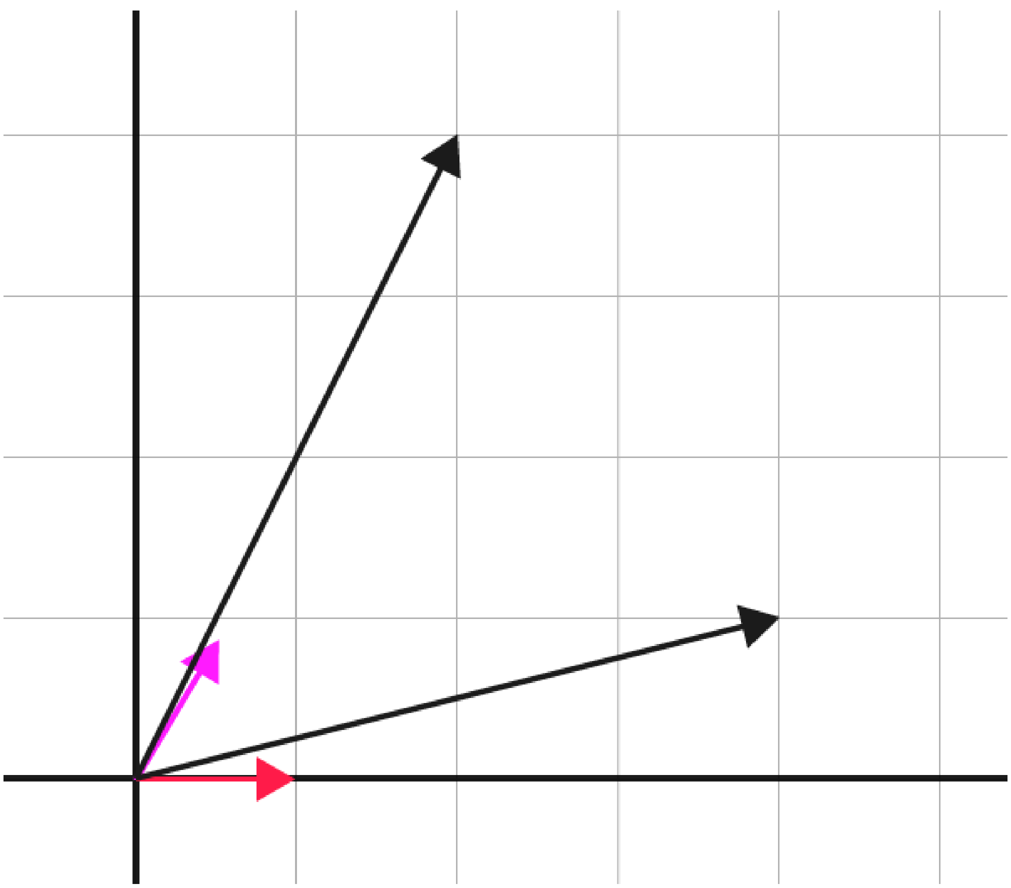
$|\vec{\alpha}|^2=\alpha^ig_{ij}\alpha^j$

写成矩阵形式：

$|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^TG\vec{\alpha}$

对于章节5、11中的例子：





斜角坐标系的协变基底： $\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & cos\varphi \\ 0 & sin\varphi\end{bmatrix} = T_2$

由于起点的基，与我们视角下的基重合，所以： $T_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

过渡矩阵：$P = T_1^{-1}T_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & cos\varphi \\ 0 & sin\varphi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0.5 \\ 0 & 0.866\end{bmatrix}$

$P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -0.577 \\ 0 & 1.155\end{bmatrix}$

斜角坐标系的逆变基底： $\begin{bmatrix}\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2\end{bmatrix} = (\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}^T)^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ -0.577 & 1.155\end{bmatrix}$

那么我们视角下（直角坐标系）的一个向量 $\begin{bmatrix}4 \\ 1\end{bmatrix}$

在斜角坐标系下的坐标（逆变分量），参考公式（8），得：

$\begin{bmatrix}A^1 \\ A^2\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}4 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.423 \\ 1.155\end{bmatrix}$

有过渡矩阵的是一般形式，而我们这里是从我们视角出发，所以后半部分是简略形式。当遇到一个从非我们的视角出发的基，在做变换时，应该使用过渡矩阵。

协变分量（简略形式用于与上式对比，因为出现的坐标是我们视角下的坐标，所以基变换就可以直接使用变换矩阵（基列向量矩阵）左乘而不用右乘过渡矩阵）是：

$\begin{bmatrix}A_1 \\ A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^1 & e^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0.5 & 0.866\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 \\ 2.866\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}|^2 &= \alpha^i\alpha_i \\ &= 3.423 \times 4 + 1.155 \times 2.866 \\ &= 17.00223\end{aligned}$$

逆变分量乘以协变分量的求和能够表达不同坐标系下的相同距离。其底层蕴含的是协变基底和逆变基底所反应出的该坐标系下x轴与y轴的夹角。斜角坐标系是直角坐标系的推广。点积的代数定义表达就是乘法原理。实数域的模和矢量的模形成了完美的统一。

自此我们也知道，实际上是先有了乘法才有了加法。正常历史成形，是倍数，是面积。但是乘法并不代表面积。乘法代表的是一种法则，满足分配率的法则。就是点积，就是投影，乘以一个单位向量，就能得到该方向的分量。模的平方就是距离的平方，等于各个同向分量的积，再将他们相加。为了这个形式，找到了度规张量。在斜角坐标系下也有了同样的加和而不用涉及角度余弦。

乘法的定义是一种递归。公式（6）.递归到最后是两个单位向量的点积等于夹角的余弦值。

协变基底与逆变基底之间的变换矩阵就是协变度规张量G.

$p_i = g_{ij}p^j$

$\begin{bmatrix}A_1 \\ A_2 \\ A_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^1 \\ A^2 \\ A^3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}A_1 \\ A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^1 \\ A^2\end{bmatrix}$

又因为特例中： $\begin{bmatrix}A_1 \\ A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A^1 \\ A^2\end{bmatrix}$

所以此特例的协变度规张量是： $G = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1{}' & \mathbf{e}_2{}' \end{bmatrix}^{-1}$

15 点积的意义

点积在直角坐标系下，才反应了向量之间的夹角关系。而夹角关系在斜角坐标系下的投影可以用斜角坐标以及斜角坐标系的斜角的数量积来描述的。

两个向量的点积。如果两个向量都是单位向量，那么结果就是夹角。如果其中一个响亮是单位向量，那么点积反应了另一个向量在该单位向量方向上的投影。注意这个投影就是90度的概念。而两个向量同方向、同长。那么点积就反映了这个坐标系所代表的的长度单位，对比这个向量的斜角坐标系点积公式如果只剩下了（$(a+b)^2 = a^2 + b^2$，没有$(ab+ab)cos\varphi$这一项）那么他们就垂直了，物理上垂直做功即为0。嵌套成了一个向量的描述。也就是模的平方。

分量积的加和，这个形式，让数学家用逆变分量乘以协变分量，然后加和。得到了长度、距离。可见形式多么重要。而他背后更重要的，是乘法到底是什么法则。是满足交换律、结合律，尤其是新增了分配率的。这么一个玩意。之后就被爱因斯坦发现了度规张量!!!

点积的几何定义到代数定义（注意顺序），从笛卡尔斜角坐标系到直角坐标系中省略的那一坨带着cos角度的东西。是真正的矩阵思维。用向量的矩阵的乘法（$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_n \end{bmatrix}_{1\times n} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$）来表示点积，是思矩阵维的一大进步。

点积的定义反应了数学的对偶性，两个向量之间，单位长度下，我对你投影，等于你对我投影。同时，一个向量看做变换，另一个向量看做坐标，那么就变成了一个二维坐标系下的坐标，向一个数轴变换上的投影，左边的变换可以在右边的坐标系中描绘成一维的数轴，这个数轴在x轴和y轴的单位向量投影，等于x轴、y轴的单位向量在这个变换数轴上的投影。

对偶：两种数学事物之间自然而又出乎意料的对应关系。一个向量的对偶，是由它定义的线性变换（简单说，一个向量对应一个二维到一维的线性变换）；一个多维空间到一维空间的线性变换的对偶是多维空间中的某个特定向量。