莱布尼茨公式、莱布尼茨三角、二项式定理

小圆滚滚

1　莱布尼茨公式

$$
\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)} v \cdot n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + u v^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}
\end{aligned}
$$

2　二项式定理

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}
\end{aligned}
$$

其中每个$\binom{n}{k}$为一个称作二项式系数的特定正整数，其等于$\frac{n!}{k!(n-k)!}$。这个公式也称**二项式公式**或**二项恒等式**。

二项式的矩阵形式：

$$
(a+b)^n = [a^0 \cdots a^n] \begin{bmatrix} C_n^0 & & \\ & \ddots & \\ & & C_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \vdots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^0 \\ \vdots \\ b^n \end{bmatrix} \quad n \in N^+
$$

3　对比产生的过程，可以看出形式相同，原理相通

定义设X、Y是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按法则f，在Y中有唯一确定的元素y与之对应，那么称f为从X到Y的映射，记作

$$f : X \to Y,$$

其中y称为元素x（在映射f下）的像，并记作$f(x)$，即

$$y = f(x),$$

而元素x称为元素y（在映射f下）的一个原像；集合X称为映射f的定义域，记作D_f，

即$D_f = X; X$中所有元素的像所组成的集合称为映射f的值域，记作R_j或$f(X)$，即

$$R_j = f(X) = \{f(x) | x \in X\}.$$

设f是从集合X到集合Y的映射，若

$R_j = Y$，

即Y中任一元素y都是X中某元素的像，则称f为X到Y上的映射或满射；若对X中任意两个不同元素

$x_1 \neq x_2$，

它们的像

$f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称f为X到Y的单射；若映射f既是单射，又是满射，则称f为一一映射（或爽射）.

映射在不同的领域有很多的名称，它们的本质是相同的。如函数，算子等等。这里要说明，函数是两个数集之间的映射，其他的映射并非函数。一一映射(双射)是映射中特殊的一种，即两集合元素间的唯一对应，通俗来讲就是一个对一个（一对一）。

定义两个算子: □和△ 。

$$\begin{aligned}(\Box + \triangle)^2 &= (\Box + \triangle) \times (\Box + \triangle) \\ &= \Box(\Box + \triangle) + \triangle(\Box + \triangle) \\ &= \Box^2 + 2\Box\triangle + \triangle^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Box \cdot \triangle)'' &= (\Box'\triangle + \Box\triangle')' \\ &= (\Box'\triangle)' + (\Box\triangle')' \\ &= \Box''\triangle + \Box'\triangle' + \Box'\triangle' + \Box\triangle'' \\ &= \Box''\triangle + 2\Box'\triangle' + \Box\triangle''\end{aligned}$$

初看Leibniz公式与二项式定理很像，但是为什么还是值得思考的。如果不是两个函数相乘而是很多个。那么，就可以定义很多类似于□和△的东西，推广出来应该就是广义二项式定理。

容易发现，导数的线性性质在这里表现为乘法的分配律。

区别在于二项式定理中□的0次方是1，而莱布尼茨公式中□的0阶导数就是□本身。