自然数的定义

小圆滚滚

1 皮亚诺公理

与依赖于集合论的定义方式不同，皮亚诺公理最初是不依赖集合论的。如果没接触集合论的情况下就能对自然数的一些基本性质有所了解。不过这两种定义方式在结果上没什么不同。

在说公理之前，首先要提到的是这是一个**描述性**而不是**构造性** 的公理系统，即是我们假定自然数已经存在，但是什么样的我们还不知道，这些公理描述了自然数的一些基本性质。

1.1 公理1

0是一个自然数。

有一点值得注意的是，皮亚诺最初对这个数使用的符号是1，而不是0。这仅仅只是符号上的差别而已，但是0和1在别的领域有很多不同的意义，（比如0往往被用作加法单位元），所以现在我们往往用的符号是0。

1.2 公理2

有这样一个“后继”函数S(n)，对所有的自然数n都有定义，且S(n)也是一个自然数。

1.3 公理3

0不是任何自然数的后继，即是不存在这样的自然数n，使得S(n)=0.

1.4 公理4

$S(n) = S(m) \Leftrightarrow n = m$

公理2-4一起定义了自然数的后继。从直觉上来看，我们可以把这个自然数的定义过程看成从0开始往后数数，而这个数数的过程就是“后继”。不过就像我们之前提到的一样，这是一个**描述性**而不是**构造性**的公理系统。我们这样做的目的是**给出能够推出自然数性质的一组最小的前提条件**，而不是构造能满足我们需要的自然数。也正是因为这样，我们需要确保我们描述的就是自然数，而不是一些别的东西。目前，这4个公理还不能良好地描述自然数，比如举一个例子，以下的伪自然数集：

$N' := 0, 0, 5, 1, 1.5, \cdots$

这样描述不是很严谨，一方面我们用到了“集合”这个概念，另一方面，我们还不知道0.5,1是什么。不过这只是用来表达一种思想。首先这个集合中，我们让0的后继是1，1的是2... 而另一方面，让0.5的后继是1.5，1.5的是2.5... 很易看出，这些数满足公理1-4，但是并不是我们想要的自然数。所以在此之外，还有最后一条公理：

1.5 公理5 数学归纳法公理

假设有对所有自然数都有定义的一个命题P(n)满足这样的条件：

1. P(0)是真的
2. $P(n) \Rightarrow P(S(n))$

则P对所有自然数都是真的。

另外，皮亚诺刚开始还描述了自然数关于相等关系的4个公理：

1. n=n
2. $a = b \Leftrightarrow b = a$
3. $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$
4. 若a是自然数，且a=b，则也b是自然数

不过现在相等关系的公理一般被归在数学基础逻辑的公理里，它们的描述对象也从自然数被拓展到了一切数学对象。

随后，我们为了把我们现在的符号系统施加到自然数上，我们定义：

$1 := S(0), 2 := S(1), \cdots$

我们现在可以定义一些别的东西，比如加法了。

我们的直觉是：S(n)就相当于n+1，1+2无非是把S施加在1上2次而已，即是1+2=S(S(1))。

而把S(1)替换为1+1，2替换为S(1)我们得到：1+S(1)=S(1+1)于是我们把加法定义如下：

1. $n + 0 := n$
2. $n + S(m) := S(n + m)$

递归地，根据定义，我们得到：

$$\begin{aligned}1 + 1 &= 1 + S(0)\\ &= S(1 + 0)\\ &= S(1)\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 + 2 &= 1 + S(1)\\ &= S(1 + 1)\\ &= S(2)\\ &= 3\end{aligned}$$

...

根据公理5，我们很易证明加法对所有自然数都有定义：

首先n+0=n是自然数。

现在假设加法已经对n+m有了定义，结果也是一个自然数，则n+S(m)=S(n+m)也是自然数。这完成了数学归纳。

那么，现在我们已经对算数的基本原理有了一定了解，就让我们来看一下下面这个简单的例子，来吧我们刚刚学到的知识运用到实践中吧。

证明2+4=6

证明：

$$\begin{aligned}
2+4 &= 2+S(3) \\
&= S(2+3) \\
&= S(2+S(2)) \\
&= S(S(2+2)) \\
&= S(S(2+S(1))) \\
&= S(S(S(2+1))) \\
&= S(S(S(2+S(0)))) \\
&= S(S(S(S(2+0)))) \\
&= S(S(S(S(2)))) \\
&= 6
\end{aligned}$$

嗯看起来我们已经描述完我们常用的加法了。不过加法的一些性质我们还不能用，比如最基础的交换律。没关系，现在我们就来证明一下吧：

定理1：加法满足交换律，即是对自然数m, n, m+n=n+m

证明:先证明两个引理。

引理1：0+a=a

使用公理5:首先0+0=0。然后假设0+a=a已成立，则0+S(a)=S(0+a)=S(a)。数学归纳法公理保证了我们的命题成立。

引理2：S(m)+n=S(m+n)

使用归纳法：首先S(m)+0=S(m)=S(m+0)。假设S(m)+n=S(m+n)已经成立，则

$$\begin{aligned}
S(m)+S(n) &= S(S(m)+n) \\
&= S(S(m+n)) && \text{（由假设）} \\
&= S(m+S(n)) && \text{（由加法定义）}
\end{aligned}$$

这完成了数学归纳。

接下来对m使用归纳法，刚才我们已经证明了：0+n=n+0=n。则假设m+n=n+m已经成立，则

$$\begin{aligned}
S(m)+n &= S(m+n) && \text{（引理2）} \\
&= S(n+m) && \text{（假设）} \\
&= n+S(m) && \text{（加法定义）}
\end{aligned}$$

数学归纳法公理保证，加法交换律成立。

由于篇幅原因，什么结合律，自然数的序（大于小于这些的），减法，乘法，这里就不再说了，大家感兴趣可以自己去找一下相关内容。不过相信通过这个过程，我们已经对自然数是什么有了更深刻的理解。