欧拉公式、三次单位根

小圆滚滚

1 欧拉公式

18世纪，瑞士大数学家欧拉开始研究虚数，并将-1平方根作为虚数的单位i（取imaginary首字母）。欧拉揭示了虚数重要的性质，且得到了被称为**数学最美的公式**：

$e^{ix}+1=0$

物理学家费曼将其称为“人类的法宝”。

欧拉在研究无穷级数的时候，发现

$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}+\cdots$

$sosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

得到：

$e^{ix}=cosx+isinx$

在实数世界中没有关系的指数函数和三角函数，在引入虚数后，便可将两者紧密的联系在一起。

后来数学家将虚数定义在与实数轴垂直的直线上，被称为虚数轴，至此虚数饱受诟病的不能可视化解决了。高斯还将平面上每一个点的数，称为复数，平面称为复平面。

复数的加减法即两个向量的加减法。那么针对i的乘法呢？我们知道用i的4次方才回到原来的位置，因此i意味着逆时针转90度。

2 虚数的意义

虚数是解一元三次方程的必须工具

一元三次方程都可化为$x^3+px+q=0$.它的解是：

$x_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}$

$x_2=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}$

$x_3=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3}}$

其中$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

根与系数的关系为$x_1+x_2+x_3=0$，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{p}{q}$，$x_1x_2x_3=-q$

判别式为$\Delta=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{2})^3$.当$\Delta>0$时，有一个实根和两个复根；$\Delta=0$时，有三个实根，当$p=q=0$时，有一个三重零根，$p,q\neq0$时，三个实根中有两个相等；$\Delta<0$时，有三个不等实根。

看到判别式小于0时，不可避免要引入虚数了。

3 ω

对于方程$x^2+x+1=0$，直接应用求根公式得
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
其中i是虚数单位，满足$i^2=-1$
事实上，根据Euler公式得
$x_1=cos(\frac{2\pi}{3})+isin(\frac{2\pi}{3})=e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$
以及
$x_2=cos(\frac{4\pi}{3})+isin(\frac{4\pi}{3})=e^{i\cdot\frac{4\pi}{3}}$
可以发现x_1和x_2实际上为三次单位根。

4 例题

求x^3在满足$x^2+x+1=0$条件的值
思路一：条件到结论
$\because x^2+x+1=0$，则$x^2=-x-1,$
$\therefore 0$乘任何数都得0，$x(x^2+x+1)=0$,则：
$x^3+x^2+x=0$
即：$x^3=-x^2-x$
$=-(-x-1)-x=x+1-x=1$
思路二：结论到条件
$\because x^3$
$=x\cdot x^2$
$=x(-x-1)=-x^2-x$
$=-(-x-1)-x$
$=x+1-x=1$