

爬楼梯数列、极限、微积分

小圆滚滚

1 一个数列

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots - \frac{1}{98} + \frac{1}{99}$$

取等式上部第1项，结果为 $\frac{1}{2}$ ，取等式上部前2项，结果为 $\frac{2}{3}$ ，取等式上部前3项，结果为 $\frac{3}{4}$ ，项数越多，越趋近于1。

2 牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

当 $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$,

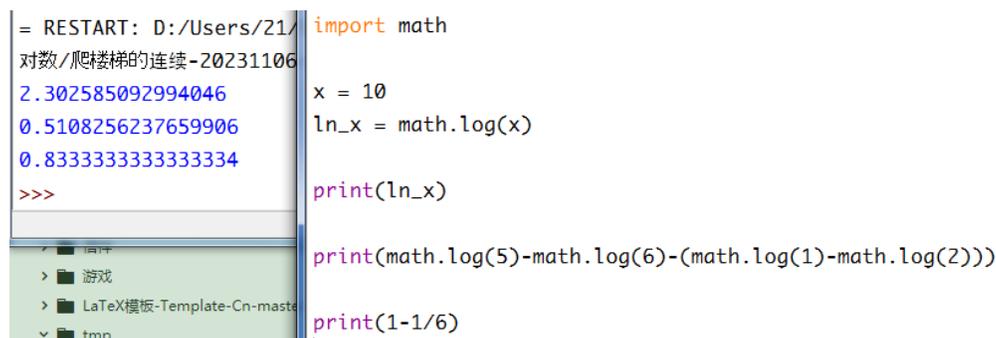
$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

则 $F(x) = \ln(x) - \ln(x+1)$ ，其中 $x > 0$

$$F(b) - F(a) = \ln(b) - \ln(b+1) + C - (\ln(a) - \ln(a+1) + C)$$

代入 $b=5, a=1$,得

$$F(5) - F(1) = \ln(5) - \ln(5+1) - (\ln(1) - \ln(1+1))$$



```
= RESTART: D:/Users/Z11/Python37/Python37-64/Python37-64 Shell
对数/爬楼梯的连续-20231106
2.302585092994046
0.5108256237659906
0.8333333333333334
>>>
import math
x = 10
ln_x = math.log(x)
print(ln_x)
print(math.log(5)-math.log(6)-(math.log(1)-math.log(2)))
print(1-1/6)
```

图 1: $x \ln(x)$ 的函数图像

你以为错在哪里？错在不连续，连续的函数是这样的：

$$\text{当 } f(x) = \frac{1}{x(x+dx)} \approx \frac{1}{x^2} = x^{(-2)},$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+dx} \rightarrow 0$$

$$\text{则 } F(x) = -x^{(-1)} = -\frac{1}{x}$$

代入 $b=5, a=1$, 得

$$F(5) - F(1) = -\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{4}{5}$$

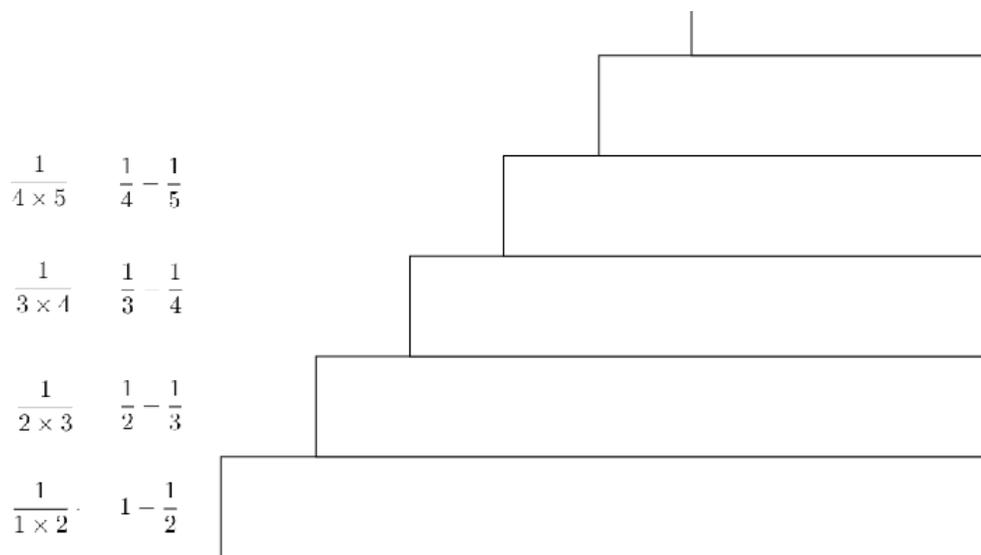


图 2: $x \ln (***)$ 的函数图像