质能方程的推导

小圆滚滚

1 质能方程的推导过程

质能方程，最著名的形式是爱因斯坦的 $E = mc^2$，表明能量（E）和质量（m）是等价的，其中 c 是光速在真空中的速度，大约是每秒 $299,792,458$ 米。这个方程是相对论理论的一个直接结果，特别是狭义相对论。

质能方程的推导过程基于狭义相对论的两个基本原理： 1. 相对性原理：物理定律在所有惯性参考系中都是相同的。 2. 光速不变原理：光速在真空中是恒定的，与光源或观察者的运动状态无关。

以下是质能方程推导的基本步骤：

1. **洛伦兹变换**：在狭义相对论中，洛伦兹变换描述了时间和空间坐标从一个惯性参考系变换到另一个惯性参考系的规则。

2. **时间膨胀**：在相对论中，一个运动中的时钟相对于静止观察者会变慢，这种现象称为时间膨胀。

3. **长度收缩**：运动中的物体在运动方向上的长度相对于静止观察者会变短，这种现象称为长度收缩。

4. **能量和动量守恒**：在没有外力作用的情况下，一个系统的总能量和总动量是守恒的。

5. **相对论性动量**：相对论中，一个物体的动量 p 不再是 mv（m 是质量，v 是速度），而是 γmv，其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ 是洛伦兹因子。

6. **相对论性能量**：相对论中，一个物体的总能量 E 是其静止能量（mc^2）和动能（$\frac{1}{2}mv^2$）的总和。当考虑相对论效应时，动能的表达式变为 $(E - mc^2)/c^2$。

7. **推导质能方程**：将相对论性动量和能量的表达式结合起来，可以得到 $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$。当物体的速度远小于光速时，γ 接近 1，这个方程退化为经典物理中的 $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$。

8. **质能等价**：最终，当物体的速度接近光速时，动能部分变得非常小，可以忽略不计，从而得到 $E = mc^2$。

这个方程表明质量可以转化为能量，能量也可以转化为质量，这在核反应和粒子物理中得到了广泛的应用。例如，在核裂变或核聚变过程中，一小部分质量转化为了巨大的能量。

2 推导过程

如果把一艘飞船加速至光速需要无穷大的能量

$K = \int F dx$

$F = \frac{dp}{dt}$

$\Rightarrow K = \int \frac{dp}{dt} dx$

其中E是能量，单位是焦耳（J）

$\Rightarrow K = \int \frac{dx}{dt} dp$

$\Rightarrow K=\int vdp$

$\because p=mv$

M是质量，单位是千克（kg）

$p=\gamma m_0 v$

$p=\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}m_0 v$

$p=\frac{m_0 v}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$

$\frac{dp}{dv}=m_0\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}$

C是真空中光速（m/s），c=299792458m/s

============================↓

这个问题涉及到微积分中的导数计算。给定的公式是相对论性动量 p 与静止质量 m_0、速度 v 和光速 c 之间的关系。公式如下：

$$p=\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

我们要求的是 p 关于 v 的导数 $\frac{dp}{dv}$。首先，我们可以将分母中的平方根写成分数指数形式，以便于求导：

$$p=m_0\frac{v}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$$

接下来，我们使用链式法则和幂法则来求导。设 $u=1-\frac{v^2}{c^2}$，那么 p 可以写为 $p=m_0\frac{v}{u^{1/2}}$。现在我们求 p 关于 v 的导数：

$$\frac{dp}{dv}=m_0\left(\frac{d}{dv}\frac{v}{u^{1/2}}\right)$$

应用链式法则，我们有：

$$\frac{dp}{dv}=m_0\left(\frac{1}{u^{1/2}}\cdot\frac{dv}{dv}-\frac{v}{2u^{3/2}}\cdot\frac{du}{dv}\right)$$

以上运用导数除法。

因为 $\frac{dv}{dv}=1$，我们可以继续简化：

$$\frac{dp}{dv}=m_0\left(\frac{1}{u^{1/2}}-\frac{v}{2u^{3/2}}\cdot\frac{d}{dv}(1-\frac{v^2}{c^2})\right)$$

现在我们求 $\frac{du}{dv}$：

$$\frac{du}{dv}=-\frac{2v}{c^2}$$

将 u 和 $\frac{du}{dv}$ 代入 $\frac{dp}{dv}$ 中：

$$\frac{dp}{dv}=m_0\left(\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}}-\frac{v}{2(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\cdot(-\frac{2v}{c^2})\right)$$

简化后得到：

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m_0 v^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

这就是 p 关于 v 的导数。

链式法则是微积分中的一个基本法则，用于求解复合函数的导数。如果你有一个由两个或多个函数复合而成的函数 $f(g(x))$，那么这个复合函数的导数可以通过链式法则来计算。链式法则表明：

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

这里，$f'(g(x))$ 是外层函数 f 在 $g(x)$ 处的导数，而 $g'(x)$ 是内层函数 g 在 x 处的导数。

将链式法则应用到相对论动量公式 p 的导数计算中，我们首先定义一个内层函数 u 和一个外层函数 f，使得 p 可以表示为 $p = f(u)$，其中 $u = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ 和 $f(u) = \frac{m_0 v}{\sqrt{u}}$。

接下来，我们分别计算 $f'(u)$ 和 u'：

1. 外层函数 $f(u) = \frac{m_0 v}{\sqrt{u}}$ 的导数 $f'(u)$：

$$f'(u) = -\frac{m_0 v}{2u^{3/2}}$$

2. 内层函数 $u = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ 的导数 u'：

$$u' = -\frac{2v}{c^2}$$

应用链式法则，我们得到 p 关于 v 的导数 $\frac{dp}{dv}$：

$$\frac{dp}{dv} = f'(u) \cdot u'$$

$$\frac{dp}{dv} = \left(-\frac{m_0 v}{2u^{3/2}}\right) \cdot \left(-\frac{2v}{c^2}\right)$$

将 u 替换回 $1 - \frac{v^2}{c^2}$ 并简化，我们得到：

$$\frac{dp}{dv} = \frac{m_0 v^2}{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}$$

这就是使用链式法则计算得到的相对论动量 p 关于速度 v 的导数。

================================↑

$dp = m_0 \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} dv$

$\because K = \int v dp$

$\Rightarrow K = \int v m_0 \frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} dv$

$\Rightarrow K = \int m_0 \frac{v}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} dv$

γ为洛伦兹因子

F代表力（牛）

速度从0到v_1

$K = \int_0^{v_1} m_0 \frac{v}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} dv$

$K = m_0 \frac{c^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^{v_1}$

$\Rightarrow K = m_0 \frac{c^2}{(1-\frac{v_1^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} - m_0 \frac{c^2}{(1-\frac{0^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow K = m_0 \frac{c^2}{(1-\frac{v_1^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} - m_0c^2$
$\Rightarrow K = m_0 \frac{1}{(1-\frac{v_1^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} c^2 - m_0c^2$
$\Rightarrow K = m_0\gamma c^2 - m_0c^2$
$\Rightarrow K = mc^2 - m_0c^2$
$\Rightarrow K = (m - m_0)c^2$
$\because E_0 = m_0c^2$ 静止质量能量Rest-mass Energy
$\Rightarrow K + E_0 = mc^2$
此刻飞船的质量也趋近于无穷大。