

逻辑学公理

小圆滚滚

1 逻辑学的公理系统

我们知道，任何理工学科都有自己的公理系统，依据某个公理集，通过推导得出整个系统的结论，那么逻辑学同样也会有公理。有了公理，我们才能从根本上学习逻辑学，才能知道逻辑的起点在哪，才不会迷茫，不会陷入循环论证的怪圈。

2 符号

如下：

1. 命题符号：a,b,c,d,e
2. 连接词： $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ （非、或，且，如果……那么）

其中a、b、c、d是抽象的命题概念，根据你的系统的变化而变化。

3 命题

5.3.2 命题、定理、证明

前面，我们学过一些对某一件事情作出判断的语句，例如：

- (1) 如果两条直线都与第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行；
- (2) 两条平行线被第三条直线所截，同旁内角互补；
- (3) 对顶角相等；
- (4) 等式两边加同一个数，结果仍是等式。

像这样判断一件事情的语句，叫做**命题** (proposition)。命题由题设和结论两部分组成。题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项。

数学中的命题常可以写成“如果……那么……”的形式，这时“如果”后接的部分是题设，“那么”后接的部分是结论。例如，上面命题(1)中，“两条直线都与第三条直线平行”是题设，“这两条直线也互相平行”是结论。

有些命题的题设和结论不明显，要经过分析才能找出题设和结论，从而将它们写成“如果……那么……”的形式。例如，命题“对顶角相等”可以写成“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”。

请你将命题(2)
(4)改写成“如果……
那么……”的形式。

20 第五章 相交线与平行线

1. 命题符号都是命题
2. 如果a是命题，那么 $\neg a$ 是命题
3. 如果a, b是命题，那么 $a \vee b$ 是命题
4. 只有上述命题才称为命题

逻辑学的定义里，只有 \neg (否定)、 \vee (逻辑析取) 是基本符号， \wedge (逻辑合取)， \rightarrow (逻辑蕴含) 这两个符号都是通过真值表定义出来的，(连接词非：否命题(注意存在逆否命题，逆命题是条件和结论颠倒)、连接词或：要么……要么(只要有一个说对了，那么这个命题就是对的，蕴含了最基础的排中律?)、连接词与/并且)

在命题的基础上还有如下衍生的分类：

- 如果一个命题不包含连接词，则称为**原子命题**，如“我是人”是一个原子命题。
- 如果一个命题包含连接词，则称为**复合命题**，如“我不是人”是一个复合命题

4 命题基本公理

- 排中律：如果a是命题，那么a与 $\neg a$ 只有一个为真

其实排中律是 $\neg a$ 的真值定义，即 $\neg a$ 的真值表为：

a	$\neg a$
真	假
假	真

之所以要单独拿出来，是因为这个非常的重要，很多人在学逻辑学的过程中产生的迷惑，都是因为和在现实生活的结合中发现很多场合下，排中律是不成立的，但是又使用了经典逻辑学的一些结论，导致了思维的混乱。在经典逻辑学的体系内，你不能对排中律产生疑惑，必须承认它的正确性。

5 定义

- $a \wedge b$ 定义为 $\neg(\neg a \vee \neg b)$
- $a \rightarrow b$ 定义为 $\neg a \vee b$ (如果……那么……) 推出条件, a =炒米饭里有米和肉, b =炒米饭里有米
- $a \leftrightarrow b$ 定义为 $(\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$ (当且仅当)

在这些定义里面，最有争议的应该就是 $a \rightarrow b$ 这个符号了，因为它的真值表如下：

a	b	$a \rightarrow b$	$\neg a \vee b$
真	真	真	真
真	假	假	假
假	真	真	真
假	假	真	真

也就是 $a \rightarrow b$ 为假，当且仅当 a 真 b 假。

至此可以利用永假式推导出一些奇怪的命题，比如如果太阳从西边升起，那么霍格沃兹学院存在，这是个真命题

那么为什么要这样定义呢？从现实的角度来说，这个命题其实是没有意义的，因为太阳永远不可能从西边升起，那么这个假设无论是真命题还是假命题，对现实世界一点影响都没有。但是从定义的角度，我一旦这样定义了，那么 $a \rightarrow b$ 就可以定义为 $\neg a \vee b$ ，这样我们就可以简化符号集，得到更为凝练的逻辑公理体系，也方便计算。

至此逻辑学公理还未引入，但是已经可以通过真值表推出一些有用的方法了，比如反证法

反证法的证明：

已知 b 为真，且 $\neg a \rightarrow \neg b$ 为真。令 $\neg a$ 为真，则 $\neg b$ 为真，违反排中律。且知 $\neg a \rightarrow \neg b$ 为真，那么 $\neg b$ 为假，则 $\neg a$ 一定为假，则 a 为真

可以看到，反证法是完全基于排中律的，如果你不承认排中律，则反证法不成立。

再PS:可以看到，反证法的使用，不需要证明一个蕴含式命题与其逆否命题等价，直接从真值定义就可以得到。要证明蕴含式命题与其逆否命题等价，需要用到逻辑学公理。

6 复合命题的相互转化

在进入逻辑学公理前，我们先做一些推导的热身，之前只是定义了 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ 及命题的概念，但是包含这4个连接词的命题之间相互转化的关系我们还是没有梳理清楚，这些结论无论是日常生活还是科学研究都会经常用到

严格来说，下面的证明是不规范的，但是从学习难易的角度，先引入吧。真正引入真值表需要真值指派

先引入“=”号吧

假设 a 是命题， b 是命题，且 a 命题的真值和 b 命题相同，则 $a=b$

- 定理1: $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ 证明: 根据 \wedge 的定义, $\neg a \wedge \neg b = \neg(\neg(\neg a) \vee \neg(\neg b)) = \neg(a \vee b)$

- 即“我会游泳或我会跑步”的否命题是“我不会游泳且我不会跑步”，这里的否命题指真值与原命题完全相反
- 定理2: $\neg(a \rightarrow b) = a \wedge \neg b$ 证明: 根据 \rightarrow 的定义, $\neg(a \rightarrow b) = \neg(\neg a \vee b)$; 根据定理1, $\neg(\neg a \vee b) = (\neg(\neg a)) \wedge \neg b = a \wedge \neg b$, 则 $\neg(a \rightarrow b) = a \wedge \neg b$
- 即“如果我是人, 那么我要吃饭”的否命题是“我是人, 且我不用吃饭”

7 逻辑学基本公理

Q:逻辑学基本公理

A:逻辑学中的公理是构成逻辑系统的基础, 它们是一些基本的、被普遍接受的命题或规则, 用于推导出其他逻辑命题或定理。不同的逻辑系统可能会有不同的公理集, 但以下是一些常见的逻辑学基本公理:

1. ****非矛盾律**** (Law of Non-Contradiction): - 一个命题和它的否定不能同时为真。用符号表示为:

$$\neg(P \wedge \neg P)$$

2. ****排中律**** (Law of the Excluded Middle): - 对于任何命题P, P或其否定 $\neg P$ 必有一真。用符号表示为:

$$P \vee \neg P$$

3. ****同一律**** (Law of Identity): - 一个事物等于它自己。用符号表示为:

$$P \rightarrow P$$

4. ****无矛盾律**** (Law of Excluded Contradictions): - 如果两个命题同时为真会导致矛盾, 则至少有一个命题为假。用符号表示为:

$$(P \wedge \neg P) \rightarrow Q$$

, 其中Q是任意命题。

5. ****双条件律**** (Law of Double Negation): - 否定一个命题的否定等于原命题。用符号表示为:

$$\neg\neg P \equiv P$$

6. ****德摩根定律**** (De Morgan's Laws): - 逻辑运算的分配律, 包括: - $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ - $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

7. ****等价律**** (Law of Equivalence): - 如果两个命题逻辑上等价, 则它们可以互相替换而不改变其他命题的真值。用符号表示为:

$$(P \equiv Q) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

8. ****传递律**** (Transitive Law): - 如果P蕴含Q, 且Q蕴含R, 则P蕴含R。用符号表示为:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

9. ****合取律**** (Conjunction): - 如果两个命题都为真, 则它们的合取也为真。用符号表示为:

$$(P \wedge Q) \equiv P \wedge Q$$

10. ****析取律**** (Disjunction): - 如果两个命题中至少有一个为真, 则它们的析取也为真。用符号表示为:

$$(P \vee Q) \equiv P \vee Q$$

这些公理在经典逻辑中是普遍接受的, 但不同的逻辑系统 (如模态逻辑、直觉主义逻辑等) 可能会有不同的公理集。逻辑学的研究包括对这些公理的深入探讨, 以及它们如何构成逻辑推理的基础。

Q: 同一律的符号怎么念

A: 同一律在逻辑学中通常用符号表示, 其符号是 $P \rightarrow P$ 。这里的符号可以这样念:

- P : 代表任意命题 P 。 - \rightarrow : 表示蕴含 (或称为“蕴含于”、“导致”), 读作“意味着”或“则”。

所以, 同一律 $P \rightarrow P$ 可以读作“命题 P 意味着命题 P ”, 或者“命题 P 则命题 P ”, 表达的是命题 P 自身的真实性, 即一个命题与其自身是一致的。

8 真值表

Q: 真值表

A: 真值表是一种逻辑学工具, 用于展示逻辑运算符在不同输入值情况下的输出结果。它通常用于布尔逻辑或命题逻辑中, 帮助我们理解不同逻辑表达式在各种可能的真值组合下的真假情况。

一个真值表通常包含以下部分:

1. ****命题列****: 列出所有涉及的命题变量, 如 P, Q, R 等。 2. ****行****: 每一行代表命题变量所有可能的真值组合。 3. ****运算结果列****: 根据逻辑表达式和行中的真值组合, 计算出表达式的结果。

以下是一些基本逻辑运算的真值表示例:

否定 (NOT)

P	$\neg P$
真	假
假	真

合取 (AND)

P	Q	$P \wedge Q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

析取 (OR)

P	Q	$P \vee Q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

蕴含 (IMPLIES)

P	Q	$P \rightarrow Q$
真	真	真
真	假	假
假	真	真
假	假	真

双条件 (IFF, 等价于) (EQUIVALENT)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	真

9 如何理解 $a \rightarrow b = \neg a \vee b$

要理解“ $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ ”，可以从以下几个方面来思考：

首先，从逻辑含义上看，“ $a \rightarrow b$ ”表示如果 a 成立，那么 b 成立。这意味着当 a 为真时， b 一定为真；而当 a 为假时，无论 b 是真还是假，这个条件语句都不会被违反。

当 a 为假（即 $\neg a$ 为真）时，“ $a \rightarrow b$ ”自动成立，因为前提不满足，所以对 b 的真假没有限制。这就相当于“ $\neg a$ ”为真时整个式子成立。

当 a 为真时，要使“ $a \rightarrow b$ ”成立，就必须 b 为真，此时就相当于“ b ”为真时整个式子成立。

综合起来，“ $a \rightarrow b$ ”成立的情况与“ $\neg a \vee b$ ”成立的情况是完全一致的。

例如，如果说“如果下雨 (a)，那么地面湿 (b)”，那么当没有下雨 ($\neg a$) 时，无论地面实际湿不湿，这个条件都没有被违背；而当下雨 (a) 时，只有地面湿 (b)，这个条件才成立。这与“ $\neg a \vee b$ ”所涵盖的情况是相同的。

10 什么是命题

在逻辑学中，命题是一种具有真假值的陈述语句。

具体来说，命题是对事物情况有所断定（即肯定或否定）的思维形式。它或者是真的，或者是假的，不存在既真又假或者不真不假的情况。

例如，“今天是晴天”“ $1+1=2$ ”“地球是方的”等都是命题，因为它们对相关情况作出了明确的断定，并且能够判断其真假。

而诸如“你吃饭了吗？”“哎呀！”“这朵花真美啊！”这类语句，因为没有对事物情况作出断定，所以不是命题。

命题是逻辑推理和论证的基本单位，通过对命题之间关系的分析和推理，可以得出新的结论和知识。您是在学习逻辑学相关的知识吗？

Q: 与或非是什么

“与”“或”“非”是逻辑运算中的基本概念。

“与”（通常用符号“ \wedge ”表示）：当且仅当两个命题都为真时，“与”运算的结果为真；只要其中一个命题为假，结果就为假。例如，命题 P：今天是晴天，命题 Q：气温在 25 摄氏度以上， $P \wedge Q$ 只有在今天既是晴天且气温在 25 摄氏度以上时才为真。

“或”（通常用符号“ \vee ”表示）：只要两个命题中有一个为真，“或”运算的结果就为真；只有两个命题都为假时，结果才为假。比如，命题 P：今天下雨，命题 Q：今天下雪， $P \vee Q$ 在今天下雨或者下雪或者雨夹雪的情况下都为真。

“非”（通常用符号“ \neg ”表示）：对一个命题进行否定。如果原命题为真，那么“非”运算后的结果为假；原命题为假，“非”运算后的结果为真。例如，命题 P：月亮是圆的， $\neg P$ 则表示月亮不是圆的。

“与”“或”“非”在逻辑推理、电路设计、计算机编程等众多领域都有广泛的应用。您是在相关领域的学习或工作中遇到了这些概念吗？

Q:逻辑门一共有几种，至少需要几种可以组合成其他逻辑门？

现实世界中，晶体管是数字电路的基础；在《我的世界》中，红石电路是构成复杂电路的基本单元。

红石电路玩家，只用火把和方块，就能造出基本的逻辑门：或门和非门。或门和非门的组合可以造出与门、异或门等任意逻辑门。

常见的逻辑门主要有七种，分别是与门（AND Gate）、或门（OR Gate）、非门（NOT Gate）、与非门（NAND Gate）、或非门（NOR Gate）、异或门（XOR Gate）和同或门（XNOR Gate）。

理论上，只用与门、或门和非门这三种基本逻辑门，就可以组合成其他所有的逻辑门。

比如，通过与门、或门和非门的组合可以得到与非门：先使用与门得到两个输入的与运算结果，再对这个结果使用非门就得到了与非门的输出。

同理，或非门可以通过先使用或门得到两个输入的或运算结果，再对这个结果使用非门得到。

异或门可以通过与门、或门和非门的组合来实现。

这体现了逻辑门之间的相互关系和逻辑运算的灵活性。

例如，在数字电路设计中，为了实现特定的功能，工程师会根据需求选择合适的逻辑门组合来构建电路。

Q:怎样理解有“非”这一个逻辑运算就可以构建出其他逻辑运算。

以下为您解释为何仅“非”这一个逻辑运算理论上可以构建出其他逻辑运算：

首先，我们来看“与”运算（用符号“ \wedge ”表示）。

假设我们有两个命题 P 和 Q，“P 与 Q”（ $P \wedge Q$ ）的逻辑等价式

可以通过“非”运算表示为“ $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ ”。

也就是说，先对 P 和 Q 分别取“非”，得到“ $\neg P$ ”和“ $\neg Q$ ”，然后进行“或”运算“ $\neg P \vee \neg Q$ ”，最后再对这个结果取“非”，就得到了“P 与 Q”的效果。

接着看“或”运算（用符号“ \vee ”表示）。“P 或 Q”（ $P \vee Q$ ）可以等价地表示为“ $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ ”。

同样是先对 P 和 Q 取“非”，进行“与”运算，再整体取“非”，从而实现“或”的效果。

通过这种方式，利用“非”运算以及适当的组合和嵌套，就能够模拟出“与”和“或”运算的效果。

Q:至少需要两种逻辑运算才能推出代替其他逻辑运算啊

确实，仅用“非”一种逻辑运算来构建其他逻辑运算在实际应用中非常复杂且不直观。

一般来说，至少需要两种逻辑运算才能更方便、直接地推出并代替其他逻辑运算。

例如，用“与”（ \wedge ）和“非”（ \neg ）可以推出“或”（ \vee ）： $P \vee Q$ 等价于 $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ ；

用“或”(\vee)和“非”(\neg)也可以推出“与”(\wedge):

$P \wedge Q$ 等价于 $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ 。

这样的组合在逻辑推理和表达式的转换中更加实用和易于理解。您是在深入研究逻辑运算的相互转换吗?

Q:蕴含逻辑运算是什么

在逻辑学中,“蕴含”(通常用符号“ \rightarrow ”表示)是一种重要的逻辑运算。

命题“P 蕴含 Q”(记作 $P \rightarrow Q$),意思是如果 P 为真,那么 Q 也一定为真。

具体来说,当 P 为真而 Q 为假时, $P \rightarrow Q$ 为假;在其他情况下(P 为假时,无论 Q 的真假;或者 P 和 Q 都为真时), $P \rightarrow Q$ 都为真。

例如,命题“如果今天下雨,那么地面会湿”,这里“今天下雨”是 P,“地面会湿”是 Q。如果今天真的下雨了但地面没湿,那么这个蕴含关系就是假的;如果今天没下雨,不管地面湿不湿,或者今天下雨且地面湿了,这个蕴含关系都是真的。

蕴含关系在逻辑推理、数学证明以及计算机科学中的逻辑电路设计、编程语言的条件判断等方面都有广泛的应用。您是在学习这方面的知识时遇到了关于蕴含的问题吗?

Q:a蕴含b可以写成非a或b吗

在逻辑运算中,“a 蕴含 b”($a \rightarrow b$)等价于“非 a 或 b”($\neg a \vee b$)。

当 a 为假时,无论 b 的真假, $a \rightarrow b$ 都为真,这与 $\neg a$ 为真时, $\neg a \vee b$ 为真相对应;当 a 为真时,若 b 为真,则 $a \rightarrow b$ 为真,这与 a 为真且 b 为真时, $\neg a \vee b$ 为真相对应;当 a 为真而 b 为假时, $a \rightarrow b$ 为假,这与 a 为真且 b 为假时, $\neg a \vee b$ 为假相对应。

所以,“a 蕴含 b”可以写成“非 a 或 b”。

Q:今天下雨为什么是个命题,地面会湿为什么是个命题。里面并没有判断啊

“今天下雨”和“地面会湿”都是命题。

“今天下雨”这个陈述对今天的天气状况作出了一种断定,虽然它没有明确说今天一定下雨或者一定不下雨,但它给出了关于天气的一种可能性描述,存在“真”(今天确实下雨)和“假”(今天没有下雨)两种可能的情况。

“地面会湿”同样对地面的状态作出了一种可能性的描述,存在“真”(地面湿了)和“假”(地面没湿)的情况。

在逻辑学中,只要一个陈述能够明确地具有真假值,就可以被视为命题,不一定非得明确说出判断的结果。

Q:条件都是命题这种说法对吗

条件通常可以被表述为命题,这种说法在一定程度上是对的。

在逻辑推理中,条件往往是以一种陈述的形式出现,能够被判断为真或假。例如“如果今天下雨,那么我就带伞”,其中“今天下雨”和“我带伞”都可以被看作是具有真假值的命题。

然而,需要注意的是,有些条件的表述可能不太规范或者不太清晰,需要经过进一步的明确和整理才能被准确地视为命题。

总的来说,条件大多可以被表述为具有明确真假值的命题,但不是所有被称为“条件”的表述都必然符合严格的命题定义。

Q:非命题的条件有哪些?

严格来说,“非命题”通常指不具有明确真假值的表述。以下是一些常见的非命题的例子: 1. 祈使句,例如“请把门关上”,它不是对某个事实的陈述,没有真假之分。 2. 疑问句,如“今天天气怎么样?”其目的是获取信息,而非作出断定。 3. 感叹句,像“多么美丽的花啊!”只是表达情感,无法

判断其真假。

这些表述因为不具备对事物情况的明确断定，所以不属于命题。